BURKINA FASO

Ministère de l'Education nationale, de l'Alphabétisation et de la Promotion des Langues nationales

2020

Annales

T^{le} D

MATHEMATIQUES

- Rappel de cours
- Epreuves
- Corrigés

Interdit de vendre

BURKINA FASO

Unité – Progrès – Justice

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE,
DE L'ALPHABETISATION ET DE LA PROMOTION
DES LANGUES NATIONALES

ANNALES

MATHÉMATIQUES

TERMINALE D

AUTEURS :

Dieudonné KOURAOGO	IES
Victor T. BARRY	IES
Jean Marc TIENDREBEOGO	IES
Clément TRAORE	IES
Bakary COMPAORE	IES
Abdou KABORE	CPES

Maquette et mise en page :
OUEDRAOGO Joseph

ISBN :

Edition :
Direction Générale de la Recherche en Éducation et de l'Innovation Pédagogique

PREFACE

Dans le contexte de l'Education en Situation d'Urgence engendrée par la crise sécuritaire dans notre pays depuis 2016, le Ministère de l'Education nationale, de l'Alphabétisation et de la Promotion des Langues nationales (MENAPLN) a vu la nécessité de recourir à des alternatives pédagogiques pour assurer la continuité éducative des élèves en rupture de scolarité.

Cet impératif s'est exaspéré en fin de second trimestre de l'année scolaire 2019-2020 par une crise sanitaire due à la pandémie de la COVID-19 qui a entraîné la suspension des activités pédagogiques pendant trois (03) mois. Durant cette période, mon département a produit des ressources pédagogiques numériques qui ont été diffusées par la radio, la télévision et une plateforme WEB éducative au profit des élèves des classes d'examen du primaire, du post-primaire et du secondaire.

Pour ceux d'entre eux qui n'ont pas accès à ces canaux de diffusion et par souci d'équité et d'inclusion, il est apparu nécessaire de produire des résumés suivis d'exercices corrigés pour leur permettre de s'exercer en vue des examens scolaires.

Pour se faire, les équipes pédagogiques disciplinaires du MENAPLN ont été mises à contribution pour concevoir des supports pédagogiques adaptés aux besoins de maintien et de réussite des apprenants.

Qu'il me plaise de rappeler une fois encore que les supports didactiques ne remplacent pas l'enseignant dont le rôle est essentiel. Ils permettent aux élèves de poursuivre leur apprentissage en dehors de la classe afin de ne pas rompre avec le savoir dans les situations de rupture scolaire.

A tous les acteurs et partenaires qui se sont investis pour produire ces chefs d'œuvre dans les conditions d'urgence, je leur réitère ma gratitude et mes remerciements et adresse mes vœux de succès aux candidats et aux futurs utilisateurs de ces bréviaires.

Le Ministre de l'Education nationale, de l'Alphabétisation et de la Promotion des Langues nationales

Ministère de l'Education Nationale, de l'Alphabétisation et de la Promotion des Langues Nationales — Le Ministre

Pr Stanislas OUARO

Officier de l'Ordre des Palmes Académiques

AVANT-PROPOS

La présente annale destinée à la classe de terminale D a pour but d'aider le professeur dans son enseignement et le candidat au baccalauréat D de se préparer à l'épreuve de mathématiques.

Cette annale comporte trois parties :

Première partie : résumé du cours par chapitre ;

Deuxième partie : énoncés des épreuves du baccalauréat D ;

Troisième partie : propositions de corrigés des épreuves.

Les candidats ne tireront profit qu'en résolvant et trouvant par eux-mêmes les solutions sans avoir recours aux corrigés. Les corrigés sont pour confirmer leurs justes réponses ou donner d'autres pistes de résolution qui ne sont peut-être pas les leurs. Le succès résulte de l'effort et de la méthode.

Nous vous souhaitons du plaisir dans vos activités mathématiques et attendons vos critiques et suggestions pour des améliorations futures d'autres œuvres.

Les auteurs

RAPPEL DE COURS

Chapitre : ***Les suites numériques***

Objectifs :

- Mettre en œuvre les énoncés admis sur les limites des suites ;
- Connaître les limites et les comportements asymptotiques comparés des suites numériques.

1. Généralités sur les suites numériques

a) Définition

On appelle suite numérique, toute application U définie de $\mathbb{N}$ (ou d'un sous ensemble I de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$. On la note $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(U_n)_{n\in I}$).

$$U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto U(n) = U_n.$$

b) Modes de détermination d'une suite

Une suite numérique peut être définie :

✓ Soit par une formule explicite qui permet de calculer ***les termes*** $\boldsymbol{U_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

Exemples :

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U_n = 2n - 3$.
- Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $U_n = \frac{3n^2-2}{n}$.

✓ Soit par la donnée ***d'un terme*** quelconque (en général son **1**[er] ***terme***) et d'une relation qui lie deux termes consécutifs (permettant de calculer un terme à partir du terme qui le précède).

Exemples :

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{3}{2} \end{cases}$ $, n \in \mathbb{N}$.
- Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\begin{cases} V_1 = 4 \\ V_{n+1} = \frac{3}{2}V_n + 5 \end{cases}$ $, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Sens de variation d'une suite

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq U_{n+1}$ (resp. $U_n < U_{n+1}$) alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. strictement croissante).
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \leq U_n$ (resp. $U_{n+1} < U_n$) alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. strictement décroissante).
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n$ alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite constante.

d) Comparaisons sur les suites

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques et $n_0 \in \mathbb{N}$.

- ✓ Si pour tout $n \geq n_0$, $U_n \geq V_n$ (resp. $U_n > V_n$) on dit que la suite (U_n) est supérieure (V_n) (resp. (U_n) est strictement supérieure à (V_n)).
- ✓ Si pour tout $n \geq n_0$, $U_n \leq V_n$ (resp. $U_n < V_n$) on dit que la suite (U_n) est inférieure (V_n) (resp. (U_n) est strictement inférieure à (V_n)).
- ✓ On dit que la suite (U_n) est ***majorée*** s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq n_0, U_n \leq M$.
- ✓ On dit que la suite (U_n) est ***minorée*** s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq n_0$, $\quad m \leq U_n$.
- ✓ Si la suite (U_n) est la fois minorée et majorée, on dit qu'elle ***bornée***.

Remarque : Une suite *positive* (resp. *négative*) est *minorée* par 0 (resp. *majorée* par 0).

2. Suites arithmétiques et suites géométriques

a) Suites arithmétiques

- Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique s'il existe un réel r tel que tout $n \in \mathbb{N}$,
$$U_{n+1} = U_n + r.$$
Le réel r s'appelle la raison de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de 1er terme U_0. On a :
$$U_n = U_0 + nr.$$
- ✓ Si le 1er terme est U_1 alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$U_n = U_1 + (n-1)r.$$
- ✓ Pour tous entier n et k $(n > k)$;
$$U_n = U_k + (n-k)r.$$
- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r.
- ✓ Si $r > 0$ alors la suite (U_n) est croissante.
- ✓ Si $r < 0$ alors la suite (U_n) est décroissante.
- ✓ Si $r = 0$ alors la suite (U_n) est constante.
- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de 1er terme U_0.
- ✓ La somme S_n des n 1er termes est : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1}$.
$$S_n = n \times \frac{(U_0 + U_{n-1})}{2}.$$
- ✓ Si le 1er terme est U_1 alors la somme S_n des n 1er termes est :
$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$.
$$S_n = n \times \frac{(U_1 + U_n)}{2}.$$
- ✓ Si le 1er terme est U_k alors la somme S_{n+1} des $(n+1)$ 1er termes est :
$S_{n+1} = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \cdots + U_{n+k}$.
$$S_n = (n+1) \times \frac{(U_k + U_{n+k})}{2}.$$

b) Suites géométriques

- Une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique s'il existe un réel q tel que tout $n \in \mathbb{N}$,
$$V_{n+1} = qV_n.$$
Le réel q s'appelle la raison de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de 1er terme V_0. On a :
$$V_n = V_0 q^n.$$
- ✓ Si le 1er terme est V_1 alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$V_n = V_1 q^{(n-1)}.$$
- ✓ Pour tous entier n et k $(n > k)$;
$$V_n = V_k q^{(n-k)}.$$
- Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r.
- ✓ Si $q > 1$ alors la suite (V_n) est croissante.
- ✓ Si $0 < q < 1$ alors la suite (V_n) est décroissante.
- ✓ Si $q = 1$ alors la suite (V_n) est constante.
- ✓ Si $q < 0$, (V_n) est une suite alternée
- Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison q et de 1er terme V_0.
- ✓ La somme S_n des n 1er termes est : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}$.
$$S_n = V_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$
- ✓ Si le 1er terme est V_1 alors la somme S_n des n 1er termes est :

$S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$.
$$S_n = V_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$
- ✓ Si le 1er terme est V_k alors la somme S_{n+1} des $(n+1)$ 1er termes est :

$S_{n+1} = V_k + V_{k+1} + V_{k+2} + \cdots + V_{n+k}$.
$$S_{n+1} = V_k \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

3. Convergence des suites numériques

a) Définition

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

- ✓ On dit que la suite (U_n) est convergent si elle admet une limite finie l. On note $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$.
- ✓ On dit que la suite (U_n) est divergente si elle n'est pas convergente.
On a $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

b) Limite par comparaison

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $n_0 \in \mathbb{N}$.

- ✓ S'il existe une suite (V_n) telle que pour tout $n \geq n_0$, $U_n \geq V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

- ✓ S'il existe un suite (W_n) telle que pour tout $n \geq n_0$, $U_n \leq W_n$ et $\lim_{n\to+\infty} W_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.
- ✓ S'il existe un réel l tel que pour tout $n \geq n_0$, $W_n \leq U_n \leq V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = l$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$.
- ✓ Si pour tout $n \geq n_0$, $|U_n - l| \leq V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$; alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$.
- ✓ Si pour tout $n \geq n_0$, $U_n \leq V_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n = l'$; alors $l \leq l'$.

c) Limite des suites monotones

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

- ✓ Si (U_n) est croissante et majorée alors (U_n) converge.
- ✓ Si (U_n) est décroissante et minorée alors (U_n) converge.
- ✓ Si (U_n) est monotone et bornée alors (U_n) converge.

d) Convergence des suites arithmétiques et géométriques

- **Convergence des suites arithmétiques**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de 1er terme U_0.

- ✓ Si $r = 0$ alors la suite (U_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} U_n = U_0$.
- ✓ Si $r \neq 0$ alors la suite (U_n) est divergente et $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty, & r > 0 \\ \lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty, & si\, r < 0 \end{cases}$

- **Convergence des suites géométriques**

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de 1er terme V_0.

- ✓ Si $q = 1$ alors la suite (V_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} V_n = V_0$
- ✓ Si $|q| < 1$ alors la suite (V_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$.
- ✓ Si $q \leq -1$, la suite (V_n) est divergente n'a pas de limite.
- ✓ Si $q > 1$ alors la suite (V_n) est divergente et $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty, & V_0 > 0 \\ \lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty, & si\, V_0 < 0 \end{cases}$

e) Opérations sur les limites des suites

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.

Les propriétés sur les limites de la somme $(U_n + V_n)$, du produit $(U_n \times V_n)$ et du quotient $(\frac{U_n}{V_n})$, si $V_n \neq 0$; sont les mêmes que celles sur les limites des fonctions numériques.

f) Limites des suites définies à l'aide d'une fonction

- **Suite de type $U_n = f(n)$**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et (U_n) une suite définie par $U_n = f(n)$.

Si f admet une limite en $+\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

- **Suite de type $U_{n+1} = f(U_n)$**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et (U_n) une suite numérique définie par $U_{n+1} = f(U_n)$.

Si la suite (U_n) est convergente et de limite l, alors $l = f(l)$.

Chapitre : ***Courbes paramétrées***

Objectifs :

- mettre en évidence et exploiter les périodicités et les symétries éventuelles,
- dresser le tableau de variations des fonctions coordonnées x et y,
- calculer les coordonnées (x'(t), y'(t)) du vecteur dérivé,
- connaître l'interprétation cinématique du vecteur dérivé.

1. Notion de courbes paramétrées

a) Définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit x et y deux fonctions de la variable réelle t.

A tout réel t, on associe le point $M(t)$ définie par le vecteur

$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$.

L'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan tels que :

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I$ est appelée courbe paramétrée de paramètre t.

On note $M(t)\ (x(t);y(t))$ le point de paramètre t.

Le système $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I$ est la représentation paramétrique de la courbe (C) ou le système d'équations paramétrique de la courbe (C).

Exemples de représentations paramétriques

$\begin{cases} x(t) = 2 - 3t \\ y(t) = -4 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\begin{cases} x(t) = e^{sint} \\ y(t) = \cos t \end{cases}$, $t \in [-\pi;\pi]$

b) Propriétés des fonctions coordonnées et interprétation graphique

✓ **Périodicité**

Soit (C) la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I$

Si x et y sont deux fonctions périodiques qui admettent le réel positif T pour période commune, alors la courbe (C) est obtenue complètement, en faisant varier t dans un intervalle d'amplitude T.

✓ **Parité**

Dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la courbe paramétrée (C) définie par :

$$M(t)\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I.$$

Lorsque les fonctions x et y sont paires ou impaires sur I, les points $M(t)$ et $M(-t)$ ont des positions relatives remarquables, et la courbe possède alors certaines propriétés de symétrie.

Tableau illustratif des propriétés de symétrie.

Si	$x(-t) = x(t)$ $y(-t) = -y(t)$	$x(-t) = -x(t)$ $y(-t) = y(t)$	$x(-t) = -x(t)$ $y(-t) = -y(t)$
alors $(\mathcal{C})$ est	Symétrique par rapport à (ox).	Symétrique par rapport à (oy).	Symétrique par rapport à O.
Illustration graphique			

Dans le cas où les fonctions x et y sont toutes paires, alors la courbe complète est obtenue sur l'intervalle I.

2. **Vecteurs dérivés**

a) **Vecteur dérivé du vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ et tangente au point $M(t)$.**

✓ **Définition**

Soit (Γ) la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t\epsilon I$.

✓ La position du point $M(t)$ est donnée par le vecteur $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$

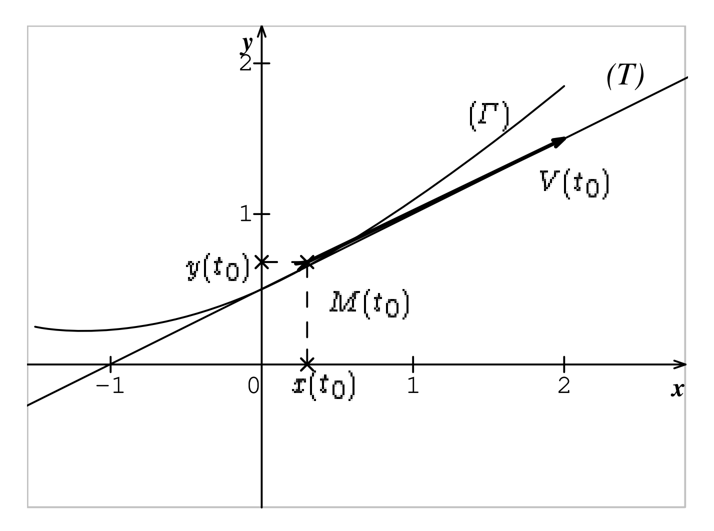
✓ Si les fonctions $x \longmapsto x(t)$ et $y \longmapsto y(t)$ sont dérivables sur I, alors pour tout $t_0 \in I$, le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)(x'(t_0), y'(t_0))$ est appelé vecteur dérivé du vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ au point $M(t_0\ )(x_0(t_0), y_0(t_0))$. On le note $\vec{V}(t_0)$: $\vec{V}(t_0)(x'(t_0), y'(t_0))$.

✓ Pour tout $t \in I$, $\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$.

Le vecteur $\vec{V}(t_0)(x'(t_0), y'(t_0))$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe (Γ) au point $M(t_0\ )(x_0(t_0), y_0(t_0))$.

✓ Tangente en un point

Soit $M(t_0\ )(x_0(t_0), y_0(t_0))$ un point de la courbe (Γ), où le vecteur dérivé $\vec{V}(t_0)$ n'est pas nul. La tangente en $M(t_0\ )$ à (Γ) est la droite passant par $M(t_0\ )$ et de vecteur directeur $\vec{V}(t_0)$.



✓ Equation de la tangente en un point

Soit $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$ de coordonnées $(x'(t_0);\ y'(t_0))$ désigne le vecteur dérivé au point $M(t_0)$ et (T) la tangente à (Γ) au point $M(t_0)$.

$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$ $(x'(t_0);\ y'(t_0))$		(T) la tangente à (C) au point $M(t_0)$.
Si $x'(t_0) \neq 0$ *et* $y'(t_0) \neq 0$	alors	(T) a pour pente : $\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$; (T) : $y = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)) + y(t_0)$
Si $x'(t_0) = 0$ *et* $y'(t_0) \neq 0$	alors	(T) a pour équation $x = x(t_0)$ (T) est verticale

Si $x'(t_0) \neq 0$ *et* $y'(t_0) = 0$	alors	(T) a pour équation $y = y(t_0)$ (T) est horizontale
Si $x'(t_0) = 0$ *et* $y'(t_0) = 0$	alors	(T) devrait être précisée dans l'énoncé

b) Vecteur dérivé du vecteur $\vec{V}(t)$

Soit $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$, $(avec\ t \in I)$ le vecteur position d'un point $M(t)$ d'une courbe paramétré (Γ).

✓ Si les fonctions $x \longmapsto x(t)$ et $y \longmapsto y(t)$ sont deux fois dérivables sur I, alors pour tout $t_0 \in I$ le vecteur $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0)(x''(t_0), y''(t_0))$ est le vecteur dérivé du vecteur $\vec{V}(t)$ au point $M(t_0)(x_0(t_0), y_0(t_0))$.

On le note $\vec{\gamma}(t_0)$: $\vec{\gamma}(t_0)(x''(t_0), y''(t_0))$.

✓ Pour tout $t \in I$, $\vec{\gamma}(t) = \vec{V}'(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$.

3. Interprétation cinématique

a) Trajectoire d'un point mobile

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

- le point $M(t)(x(t); y(t))$ désigne un point mobile avec t appartenant à un intervalle de temps I.
- la courbe (Γ) définie par : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I$ est la trajectoire du point mobile $M(t)$.

b) Vecteur vitesse du mobile

- le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)(x'(t_0), y'(t_0))$ est appelé vecteur vitesse du point mobile à l'instant t_0.

Chapitre : ***Statistiques à deux variables***

Objectifs :

- représenter un nuage de point et son point moyen ;
- mettre en place un ajustement affine.

1. Nuage de point et point moyen

Soit (X, Y) une série statistique à deux variables prenant n couples de valeurs (x_i, y_i), où les x_i sont les valeurs prises par X et les y_i sont celles prises par Y.

- **Nuage de points**
  - ✓ La série statistique peut être représentée par un tableau.

Variable X	x_1	x_2	x_3	....	x_{n-1}	x_n
Variables Y	y_1	y_2	y_3	....	y_{n-1}	y_n

  - ✓ La série statistique peut être représentée dans un repère orthogonal :
    On appelle nuage de points associé à la série (X, Y), l'ensemble des points $M_i(x_i; y_i)$ qui représentent la série statistique dans un repère orthogonal.
- **Point moyen**
  - ✓ La moyenne des valeurs prises par la variable X est $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$.
  - ✓ La moyenne des valeurs prises par la variable Y est $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n y_i$.

On appelle point moyen de la série statistique, le point noté $G(\overline{x}, \overline{y})$.

2. Ajustement affine

Lorsque la forme du nuage de points d'une série statistique se présente tel qu'il soit possible de tracer une droite qui passe le près possible des points, on peut réaliser un ajustement affine ou linéaire du nuage de point. La droite obtenue est appelée droite d'ajustement.

On compte trois méthodes d'ajustement affine.

- **La méthode du tracé au jugé**

Elle consiste à tracer à la règle une droite que l'on juge passée le plus près possible des points du nuage.

- **La méthode du point moyen**

Elle consiste à tracer une droite qui passe par le point moyen $G(\overline{x}, \overline{y})$ et qui passe le plus près possibles des points du nuage.

- **La méthode du fractionnement du nuage ou méthode de Mayer**

Elle consiste à :

- ✓ Fractionner le nuage de points en deux nuages distincts N_1 et N_2 dont les effectifs sont égaux ou diffèrent d'au plus 1.
- ✓ Déterminer les points moyens respectifs $G_1\left(\overline{x}_1, \overline{y}_1\right)$ et $G_2\left(\overline{x}_2, \overline{y}_2\right)$ des deux nuages.
- ✓ Ajuster le nuage de points de la série statistique par la droite (G_1G_2).

Chapitre : *Géométrie dans l'espace*

Objectifs :

Les élèves doivent savoir calculer dans un repère orthonormal :

- La distance entre deux points A et B,
- La distance d'un point M à une droite (AB),
- La distance d'un point M à un plan (ABC),
- L'aire d'un parallélogramme (ou l'aire d'un triangle).

1. Extension du calcul vectoriel à l'espace

a) Ensemble des vecteurs de l'espace

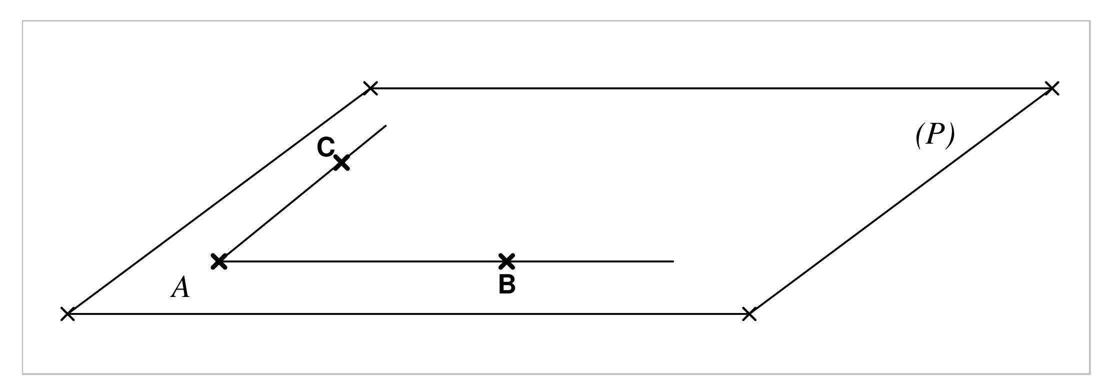
NB: Les propriétés et les règles de calculs vues en géométrie du plan restent valables pour la géométrie dans l'espace :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme
- O étant un point de l'espace, pour tout vecteur $\vec{u}$; il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si il existe un réel non nul k tel que $\vec{u} = k.\vec{v}$.
- La droite $(\mathcal{D})$ passant par le A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda.\vec{u}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- Deux droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Deux droites sont perpendiculaires si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- Trois points A, B et C sont alignés s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda.\overrightarrow{AB}$.

b) Vecteurs et plans de l'espace

- **Vecteur directeur d'un plan**

Soient A, B, C trois points non alignés du plan.

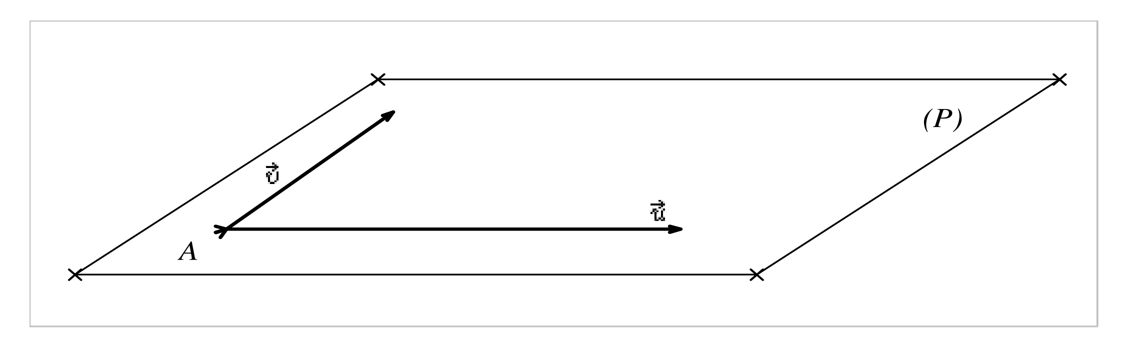


Propriétés

✓ M appartient au plan (ABC) si et seulement si, il existe deux réels $x\ et\ y$ tels que: $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC}$

✓ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires, et A est un point de l'espace.

Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent un plan (P) passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



- **<u>Vecteurs coplanaires</u>**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et quatre points A, B, C, D tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$.

On dit que les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$; et $\vec{w}$ sont coplanaires (appartiennent au même plan) si et seulement si A, B, C et D sont coplanaires.

c) <u>Bases et repères de l'espace</u>

Définitions

- On appelle base de l'espace (Ɛ), tout triplet $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires de l'espace.
- Soit O un point de l'espace. On dit que (O ;$\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}$) est un repère de l'espace (Ɛ) si $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est une base. O désigne l'origine du repère.
- Soit (O ;$\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}$) un repère de (Ɛ).
  Pour tout point M, il existe un triplet de réels $(x; y; z)$ tel que
  $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

Le triplet $(x; y; z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère (O ;$\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}$).

✓ Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$; $\alpha\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$

✓ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que : $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = k$

✓ (O ;$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) est un repère de (Ɛ).

Soient M$(x;y;z)$ et M'$(x';y';z')$.

- ✓ le vecteur $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$.
- ✓ si I est milieu de [MM'] alors I $(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2};\frac{z+z'}{2})$

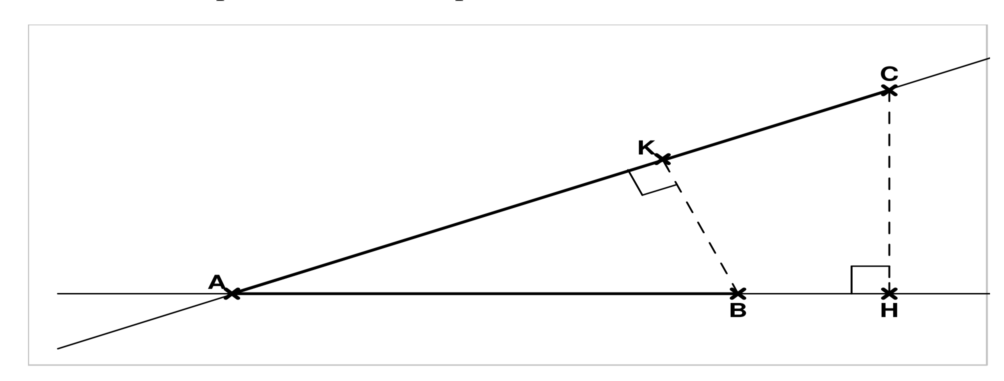
d) Produit scalaire dans l'espace

- **Définition**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et soient les points A, B, C tels que

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan contenant les points A, B et C.



$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= \overline{AB}.\overline{AH} = \overline{AC}.\overline{AK}$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

- ✓ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- ✓ $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
- ✓ $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$
- ✓ $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$ et $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- ✓ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$

- **Expression analytique**

✓ Une base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace est orthonormal si les vecteurs de base sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$

✓ Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs d'une base orthonormale $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. alors on a :

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$

✓ Si A $(x_A; y_A; z_A)$ et B $(x_B; y_B; z_B)$ sont deux points d'un repère orthonormal (O;$\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}$), alors on a : AB=$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

e) Orthogonalité dans l'espace

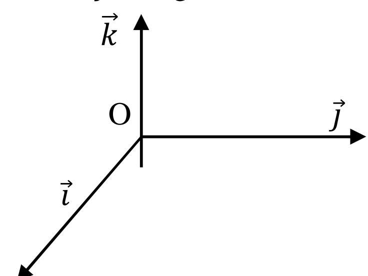
Soient (D) et (D') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

- ✓ les droites (D) et (D') sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- ✓ si (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et (P) un plan de vecteurs directeurs $(\vec{v};\vec{w})$, alors (D) ⊥ (P)⟺ $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\vec{u} \perp \vec{w}$.

2. Produit Vectoriel

a) Espace orienté

- Tout triplet $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de vecteurs non nuls et non coplanaires détermine une base de l'espace.
- Si $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est une base de l'espace, tout quadruplet (O,$\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) détermine un repère de l'espace.
- Le repère (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) de l'espace est dit direct si un homme (règle du bonhomme d'ampère), traversé par le vecteur $\vec{k}$ des pieds à la tête et regardant dans le sens du vecteur $\vec{\imath}$ a le vecteur $\vec{\jmath}$ à sa gauche.



b) Produit vectoriel : Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ (pris dans cet ordre) le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et défini tel que :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors,

- ✓ Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ et la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe.
- ✓ La norme du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\left|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right|$

c) Propriétés du produit vectoriel

Pour tous vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ de l'espace et pour tout réel λ, on a :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$
- $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$

d) Coordonnées du produit vectoriel

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthogonale directe de l'espace.

Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées dans cette base

$$\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Disposition pratique pour calculer les coordonnées du produit vectoriel.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace orienté.

Pour calculer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ on peut disposer les coordonnées comme ci-dessous :

x x'
y y'
z z'
x x'
y y'
z z'

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{\imath} + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$$

3. Application du produit vectoriel

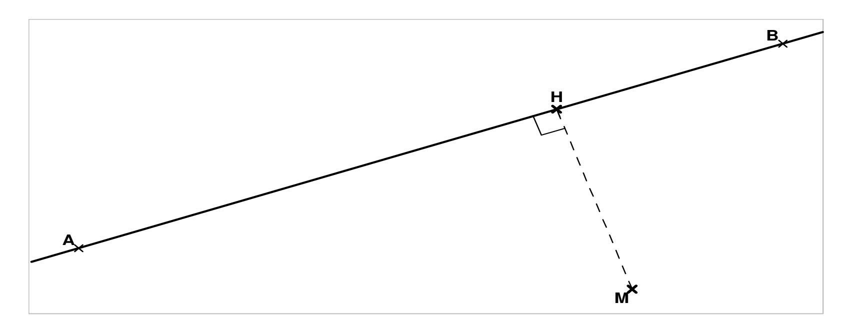
a) Aire d'un parallélogramme, aire d'un triangle

- L'aire d'un parallélogramme ABDC est S = $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
- L'aire d'un triangle ABC est S' = $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

b) Distance d'un point à une droite

Activité

Dans l'espace, on considère une droite (AB) ; un point M et le projeté orthogonal H de M sur (AB).



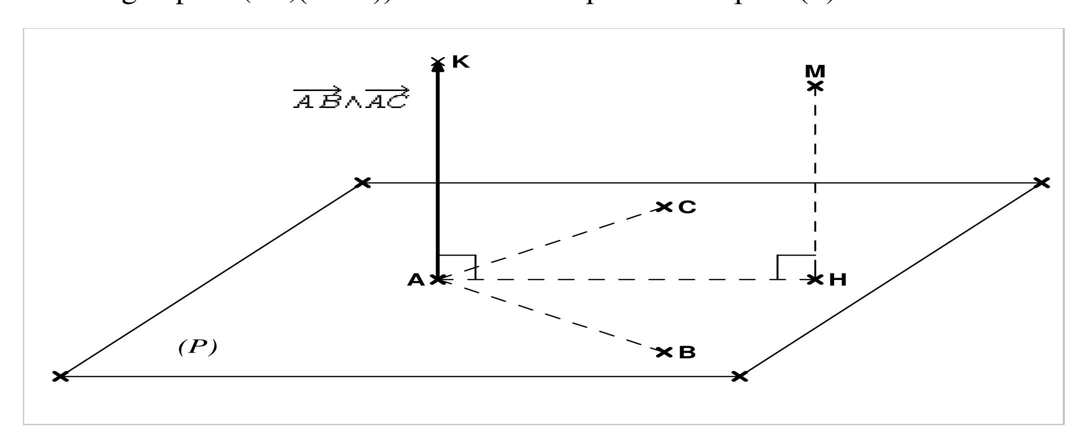
La distance du point M à la droite (AB) est la distance du point M à son projeté orthogonal H sur la droite (AB).

La distance du point M à la droite (AB) est : **d(M ;(AB))** = $\frac{\|\overrightarrow{MH} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$

c) Distance d'un point à un plan

On considère dans l'espace le plan (P). Soient A, B, C trois points de ce plan, M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur (P).

On désigne par d(M ;(ABC)) la distance du point M au plan (P).

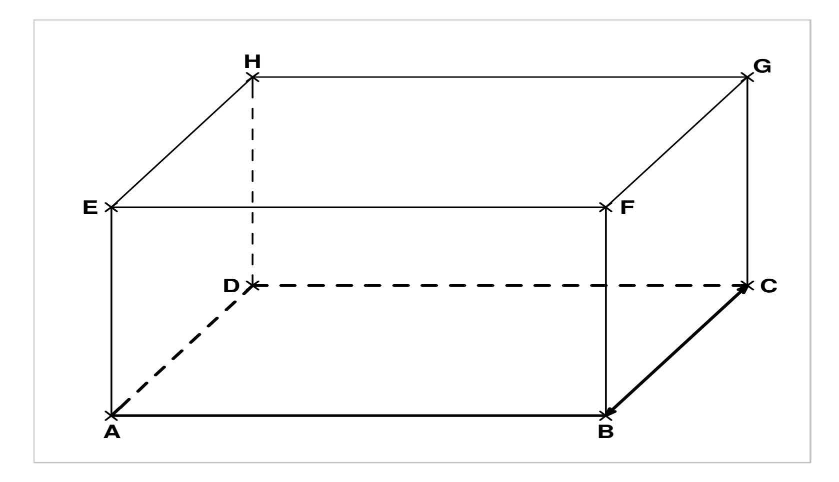


La distance du point M au (P) est la distance du point M à son projeté orthogonal H sur le plan (P).

La distance du point M au plan (ABC) est : **d (M; (ABC))**= $\frac{|\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$

d) Calcul de volume

a) <u>Volume d'un parallélépipède</u>



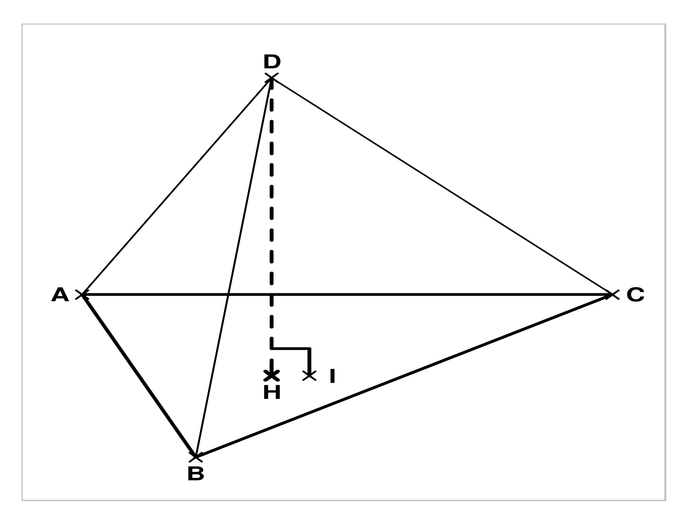
Volume = (surface de base)$\times$ hauteur

$= \text{Aire (ABCD)} \times d(\text{E} ; (\text{ABC}))$

$= \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| \times \frac{\left|\overrightarrow{EA}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$

Volume = $\left|\overrightarrow{EA}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\right|$

b) **<u>Volume d'un tétraèdre</u>**



Volume = $\frac{1}{3}$ (surface de base)$\times$ hauteur

$= \frac{1}{3} \text{ Aire (ABC)} \times d(\text{D} ; (\text{ABC}))$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| \times \frac{\left|\overrightarrow{DA}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}\right]$

Volume = $\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{DA}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\right|$

Chapitre : *Probabilités*

1. Vocabulaire des probabilités

a) Définitions

- Une expérience aléatoire est une expérience dont l'issue (le résultat) ne peut être prévue à l'avance.
- Les résultats possibles sont appelés des éventualités. On note ω l'éventualité.
- L'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire est appelé l'univers des cas possibles. On le note généralement Ω.

Exemple : Dans une expérience de lancé d'un dé à six (6) faces, l'ensemble des cas possibles est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

- On appelle évènement toute partie (sous-ensemble) de Ω.
- On appelle évènement élémentaire, tout singleton de Ω.

Exemple : Dans le lancé du dé à six faces, les singletons $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ sont des évènements élémentaires.

- Ω est l'évènement certain.
- L'ensemble vide $\emptyset$ est l'évènement impossible.
- Etant donné deux évènements distincts A et B.
  - ✓ L'évènement "A ou B" défini par $A \cup B$.
  - ✓ L'évènement "A et B" défini par $A \cap B$.
  - ✓ L'évènement contraire de A est noté $\overline{A}$.
  - ✓ Les évènement A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

b) Language des ensembles et language des probabilités

Tableau de correspondance

Language des probabilités	Language des ensembles	Notations
univers des cas possibles	ensemble Ω	$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$
éventualité	élément de Ω	$\omega, (\omega \in \Omega)$
évènement	partie de Ω	A, $(A \subset \Omega)$
évènement élémentaire	singleton de Ω	$\{\omega\}, (\omega \in \Omega)$
évènement certain	partie pleine de Ω	Ω
évènement impossible	partie vide de Ω	$\emptyset$
évènement "A ou B"	réunion de A et B	$A \cup B$
évènement "A et B"	intersection de A et B	$A \cap B$
évènements A et B incompatibles	Parties A et B disjointes	$A \cap B = \emptyset$
évènement contraire de A	Complémentaire de A dans Ω	$\overline{A}$

2. Probabilités sur un ensemble fini

a) Définition

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire.

Une probabilité sur l'univers Ω est une application p définie de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0; 1]$ qui à tout évènement A de Ω associe le nombre $p(A)$.

$$p : \mathcal{P}(A) \longrightarrow [0; 1]$$
$$A \longmapsto p(A) \; .$$

La probabilité p vérifie les conditions suivantes :

- ✓ $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
- ✓ $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$
- ✓ $\forall A \subset \Omega, 0 \leq p(A) \leq 1$
- ✓ $\forall A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}; p(A) = \sum_{i=1}^{k} p(\{a_i\})$.

Le couple $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{p})$ est appelé espace probabilisé et le nombre $p(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A.

b) Propriétés

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω, et deux évènements A et B.

- ✓ $p(A \cup B) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(A \cap B)$
- ✓ $p(\mathrm{A}) + p(\overline{A}) = 1$ (ou $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$)
- ✓ Si $A \cap B = \emptyset$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

c) Equiprobabilité

- **Définition**

Il arrive que tous les évènements élémentaires d'une expérience aléatoire aient la même probabilité. On dit alors qu'il y a **équiprobabilité**. Cette valeur commune est $\boldsymbol{\frac{1}{Card(\Omega)}}$.

Pour tout évènement $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, on a :

$$p(A) = p(\{a_1\}) + p(\{a_2\}) + \cdots + p(\{a_k\}).$$
$$= \frac{1}{Card(\Omega)} + \frac{1}{Card(\Omega)} + \cdots + \frac{1}{Card(\Omega)}. \text{ (la somme de } k \text{ termes égaux)}$$
$$= \frac{k}{Card(\Omega)} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}.$$

- **Propriété**

Soit p une probabilité uniforme sur un univers Ω. Pour tout évènement A,

$$\boldsymbol{p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}.$$

On dit que $\boldsymbol{p(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables\ \text{à}\ A}{Nombre\ de\ cas\ possibles}}$.

d) Evènements indépendants- expériences indépendantes

- **Définition**

Soient p une probabilité définie sur un univers Ω, et deux évènement A et B.

Les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p si la réalisation de A n'affecte pas celle de B.

- **Propriété**

Soient p une probabilité définie sur un univers Ω.

✓ Si A et B sont deux évènements indépendants alors :

$$\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}.$$

✓ Si n expériences aléatoires sont indépendantes, alors pour tous évènements $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de chacun des univers associés à ces épreuves :

$$\boldsymbol{p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) \times p(A_2) \times p(A_3) \dots \times p(A_n)}.$$

e) Probabilités conditionnelles

- **Définition**

Soient p une probabilité définie sur un univers Ω, et B un évènement de probabilité non nulle.

Pour tout évènement A, la probabilité d'obtenir A sachant que B est réalisée (ou probabilité de A conditionnée par B) est :

$$\boldsymbol{p(A/B) = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}.$$

Remarque :

✓ $\boldsymbol{p_B(A) \neq p_A(B)}$

✓ S'il y a équiprobabilité $\boldsymbol{p_B(A) = \frac{Card(A)}{Card(B)}}$

- **Propriété**

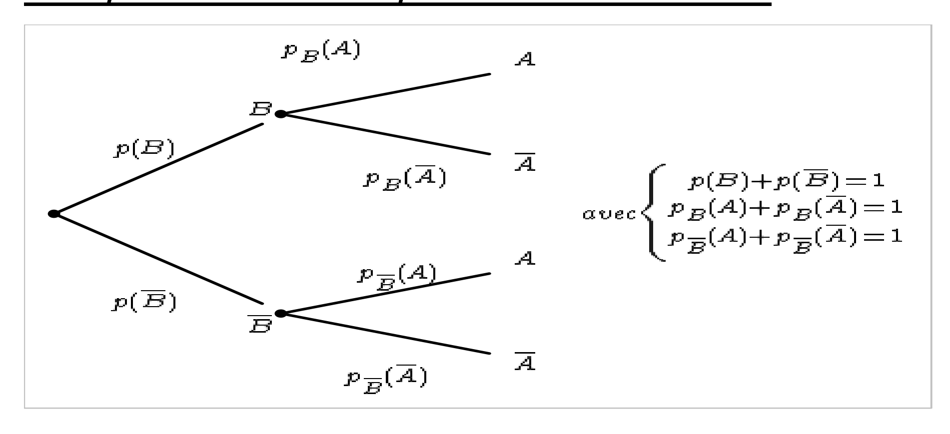
Soient p une probabilité définie sur un univers Ω, et deux évènement A et B de probabilités non nulles.

Si A et B sont deux évènements indépendants alors :

$$\boldsymbol{p_B(A) = p(A/B) = p(A)}.$$

de même $\boldsymbol{p_A(B) = p(B/A) = p(B)}$.

Arbre pondéré de calcul des probabilités conditionnelles.



f) Epreuves de Bernoulli et schéma de Bernoulli

- **Epreuve de Bernoulli**

On appelle épreuve de Bernoulli, toute expérience aléatoire à deux éventualités : l'une désignée par Succès (S) de probabilité $p= p(S)$ et l'autre désignée par Echec (E) de probabilité $q=(1-p)$.

Exemple : Dans l'expérience du lancé d'une pièce de monnaie, $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$.

- **Schéma de Bernoulli**

Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire qui consiste à réaliser n épreuves identiques de Bernoulli et indépendantes les unes des autres, dans les mêmes conditions. On s'intéresse au nombre k $(0 \leq k \leq n)$ de succès obtenus à l'issu des n épreuves.

Exemple : On lance sept (7) fois une pièce de monnaie parfaite. Quelle la probabilité d'obtenir trois (3) fois Face?

- **Propriétés**

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves, où la probabilité d'obtenir succès dans chaque épreuve est p.

La probabilité d'obtenir k succès au cours des n épreuves est : $\boldsymbol{p_k = C_n^k\, p^k q^{n-k}}$.

3. Variable aléatoire

a) Définition

Soient p une probabilité définie sur un univers $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

On appelle variable aléatoire, toute application X définie de Ω vers $\mathbb{R}$.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\{\omega_i\} \longmapsto X(\omega_i) = x_i$$

- ✓ L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- ✓ $\{X = x_i\}$ ou $(X = x_i)$ désigne l'évènement : " **X prend la valeur x_i** ". Sa probabilité est :

$$p(X = x_i) = p_i$$

- ✓ $\{X \leq x_k\}$ désigne l'évènement : **" X prend une valeur inférieure ou égale à x_k "**. Sa probabilité est :

$$p(X \leq x_i) = p_1 + p_2 + \cdots + p_k = \sum_{i=1}^{k} p_i.$$

b) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit (Ω, p) un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω.

On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X l'application qui à toute valeur x_i prise par X, associe la probabilité $p(X = x_i) = p_i$. On présente souvent la loi de probabilité de X sous forme de tableau.

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$\boldsymbol{p(X = x_i)}$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_{n-1}	p_n

c) Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Soit (Ω, p) un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω.

On appelle fonction de répartition de X, l'application F définie par :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$$
$$x \longmapsto F(x) = p(X \leq \mathrm{x})$$

On a :

$\forall x \in]-\infty; x_1[, \quad F(x) = 0;$

$\forall x \in [x_1; x_2[, \quad F(x) = p_1;$

$\forall x \in [x_2; x_3[, \quad F(x) = p_1 + p_2;$

$\forall x \in [x_3; x_4[, \quad F(x) = p_1 + p_2 + p_3;$

$\vdots$

$\forall x \in [x_i; x_{i+1}[, \quad F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_i;$

$\vdots$

$\forall x \in [x_n; +\infty[, \quad F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{i-1} + p_i + p_{i+1} + \cdots + p_n = 1.$

Remarque : la fonction de répartition F est une fonction en escalier, croissante sur $\mathbb{R}$.

d) Paramètres caractéristiques d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire de loi probabilité présentée par le tableau suivant :

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$\boldsymbol{p(X = x_i)}$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_{n-1}	p_n

- **Espérance mathématique**

On appelle espérance mathématique de X, le réel noté $E(X)$ et défini par :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

- **Variance et écart type**
  - ✓ On appelle variance de X, le réel noté $V(X)$ et défini par :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2p_1 + (x_2 - E(X))^2p_2 + \cdots + \left(x_n - E(X)\right)^2p_n = \sum_{1=1}^{n}\left(x_i - E(X)\right)^2 p_i.$$

  - ✓ L'écart type de X est la racine carrée de la variance. On la note $\sigma(X)$.

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}.$$

Remarque : $E(X)$ correspond à la moyenne en statistique.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire de variance $V(X)$.

$$\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}.$$

e) **Loi binomiale**

- **Définition**

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves auquel on associe une variable aléatoire X. Alors, $\mathrm{X}(\Omega) = \{1, 2, 3, \dots, \mathrm{n}\}$.

$\forall\ \mathrm{k} \in \mathrm{X}(\Omega)$, $p(X = \mathrm{k}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$; où p est la probabilité d'obtenir un succès à une épreuve et k est le nombre de succès au cours des n épreuves.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée ***loi binomiale de paramètres*** $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$.

- **Propriété**

Soit X une variable aléatoire dont loi de probabilité est une *loi binomiale de paramètres* n et p.

$\boldsymbol{E(X) = np}$ et $\boldsymbol{V(X) = np(1-p)}$.

Chapitre : ***Fonctions numériques***

I. Limites et continuité

1) Limites et propriétés

Propriété

f et u et v étant des fonctions numériques

* si f(x)≥g(x) ∀x et $\lim_{x->+\infty} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x->+\infty} f(x) = +\infty$

*si pour x assez grand, $l \in \mathbb{R}$, $|f(x) - l| \leq u(x)$ et si $\lim_{x->+\infty} u(x) = 0$ alors $\lim_{x->+\infty} f(x) = l$.

*si pour n assez grand $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim_{x->+\infty} u(x) = \lim_{x->+\infty} v(x) = l$ alors $\lim_{x->+\infty} f(x) = l$

Compatibilité avec l'ordre

Si pour x assez grand, f(x)≤g(x) et $\lim_{x->+\infty} f(x) = L$ et $\lim_{x->+\infty} g(x) = L'$ alors L≤ L' f et g étant des fonctions numériques.

Fonction composée

Si f et g sont des fonctions définies sur ℝ.

Si $\lim_{x->a} f(x) = b \; et \; \lim_{x->b} g(x) = c$ alors $\lim_{x->a} (gof)(x) = c$

2) Continuité

Définition

Une fonction f est continue en x_0 si $\lim_{x->x_0} f(x) = f(x_0)$

f est continu sur un intervalle I si f est continu en tout point de I

3) prolongement par continuité

Si f une fonction continue sur]a,b] admet une limite l en a alors la fonction g définie sur [a,b] par $f(x) = g(x)$ si $x \neq$ et $g(a) = l$ est une fonction continue sur [a,b]; appelée prolongement par continuité de f en a.

II. DERIVATION

1) Dérivabilité sur un intervalle I

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de ℝ et x_0 ∈I. On dit que l est dérivable en x_0 si $\lim_{x->x0} \frac{f(x)-f(x0)}{x-x0} = l$, $l \in \mathbb{R}$.

f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de ℝ.

Remarque : l est le nombre dérivé en x_0 notée $f'(x_0)$.

2) Dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite

soit f est une fonction définie sur un intervalle I de ℝ.

a) Dérivabilité à droite

On dit que f est dérivable à gauche de x_0 si

$\lim_{x->x_0^-} \frac{f(x)-f(x0)}{x-x0} = l\, , l \in$ ℝ.

b) Dérivabilité à droite

On dit que f est dérivable à droit de x_0 si

$\lim_{x->x_0^+} \frac{f(x)-f(x0)}{x-x0} = l\, , l \in$ ℝ.

c) Fonction dérivée

Si f est dérivable sur un intervalle I, la fonction f' définie par

$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f'(x)$ est la fonction dérivée sur I de f

d) Dérivée seconde

Si f' est dérivable sur I la fonction f'' définie par

$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f''(x)$ avec $\lim_{x->x0} \frac{f\prime(x)-f\prime(x0)}{x-x0} = f"(x_0)$

f'' est la dérivée seconde de f sur I

Notation

f' est notée $\frac{df}{dx}$ et f'' est aussi notée $\frac{d^2f}{dx2}$

3) Propriétés de la dérivation

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de R

On a les propriétés suivantes

(u+v)'=u'+v'

(uv)'=u'v+uv'

Si v≠0, $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-u\,v\prime}{v^2}$

(uov)'=(u'ov).v'

Propriétés

Si f est une fonction numérique strictement monotone sur I intervalle de $\mathbb{R}$ alors f réalise une bijection de I sur f(I).

4) Primitive d'une fonction

a) Définition

Soit f une fonction définie sur I un intervalle de R et F une fonction définie sur I.F est une primitive de f si F'=f

b) Propriété

Deux primitives d'une fonction diffère entre elles par une constante

Chapitre : *Nombres complexes*

Théorème (admis)

Il existe un ensemble, appelé ensemble des nombres complexes et noté ℂ, contenant ℝ et vérifiant :

i) ℝ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans ℝ.

ii) L'équation $x^2+1=0$ admet une racine dans ℂ que l'on note ***i***, appelée **solution imaginaire**.

iii) Tout élément z de ℝ, s'écrit d'une manière unique sous la forme $z=a+ib$, où a et b sont des réels.

Vocabulaire

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe.

Le réel a est appelé **partie réelle** de **z**. On le note $\mathbf{Re}(\mathbf{z})$.

Le réel b est appelé **partie imaginaire** de **z**. On le note $\mathbf{Im}(\mathbf{z})$.

L'écriture $z=a+ib$ s'appelle **forme cartésienne** (**forme algébrique**) du nombre complexe z.

Notations

Pour tout nombre naturel non nul n, on pose : $z^n = z\times z\times\ldots\times z$ (n fois). De plus si z est un nombre complexe non nul, on pose : $\mathbf{z}^{-\mathbf{n}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}^{\mathbf{n}}}$ et on convient que $\mathbf{z}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$

1. Opérations sur les nombres complexes

a) Le nombre complexe i étant solution de l'équation $x^2+1=0$, on a : $\boldsymbol{i}^2 = \mathbf{-1}$; $(\boldsymbol{-i})^2 = \mathbf{-1}$.

b) L'addition et la multiplication suivent dans ℂ, les mêmes règles que dans ℝ.

Si $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ sont deux nombres complexes, alors : $z+z'=(a+a')+i(b+b')$;

$zz'=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$ (car $i^2=-1$)

c) Pour tout nombre complexe $z=a+ib$, il existe un unique nombre complexe z' appelé opposé de z et noté $-z$ tel que $z+z'=0$ et on a : $-z=-a-ib$.

d) Pour tout nombre complexe non nul z, il existe un nombre complexe unique z' appelé inverse de z et noté $\frac{1}{z}$ tel que $zz'=1$, et on a : $\frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$.

e) $z=0$ si et seulement si $a=b=0$.

f) Si $b=0$ alors z est réel.

g) Si $a=0$ alors z est dit imaginaire pur.

Propriétés

- Deux points du plan P sont confondus si et seulement s'ils ont même affixe.
- Le nombre complexe $z = 0$ a pour image le point *O*.
- Le nombre complexe z est réel si et seulement si $M(z)$ appartient à la droite $(0, \vec{u})$.
- Le nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $M(z)$ appartient à la droite $(0, \vec{v})$.
- La transformation du plan P qui, à un point *M* d'affixe z associe le point M' d'affixe $-z$ est la symétrie centrale de centre *O*.

Théorème

Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan. Soient *A* et *B* deux points tels que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. On a : $z_{\vec{v}} = z_B - z_A$ ou $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ où z_B et z_A sont les affixes respectives des points *B* et *A*.

Translation
Soit $\vec{T}$ un vecteur d'affixe *t*. L'image d'un point *M* d'affixe z par la translation de vecteur $\vec{T}$ est le point M' d'affixe $z + t$.

Théorème

Pour tous nombres complexes z et z', on a :
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
- z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$
- z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$

Théorème

Pour tous nombres complexes z et z', on a : $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$; $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout nombre complexe z non nul et pour tout nombre complexe z', on a : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$; $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$, $\overline{(z^{-n})} = (\overline{z})^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe d'image *M*. On appelle **module de** z la distance *OM* et on note $|\mathbf{z}| = \mathbf{OM} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$.

Cas particulier

Si $b=0$, alors z est réel et $|z|=\sqrt{a^2}=|a|$ (valeur absolue de a).

Conséquences

Pour tout nombre complexe z, on a :

- $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$; $|z|=|\bar{z}|$; $|\mathrm{Re}(z)|\leq|z|$; $|\mathrm{Im}(z)|\leq|z|$.
- Si $M(z)$ est l'image de z alors $OM=|z|$.
- Si A et B sont deux points du plan complexe alors : $AB=|z_B-z_A|$.
- Pour tout nombre complexe z non nul, on a : $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Théorème

1. Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $|z|=0$ équivaut à $z=0$
- $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire)
- $|\lambda z|=|\lambda||z|$, pour tout réel λ

2. Pour tous nombres complexes z et z', on a :

$|zz'|=|z||z'|$; $|z^n|=|z|^n$; $n\in\mathbb{N}^*$

3. Pour tout nombre complexe non nul z et pour tout nombre complexe z',on a :

$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$; $\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$; $|z^{-n}|=|z|^{-n}$; $n\in\mathbb{N}^*$

Théorème (admis)

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans P. On a : $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $\theta=\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right)$ $[2\pi]$.

Réciproquement si le nombre complexe z s'écrit $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $r>0$ et θ réel, alors : $r=|z|$ et $\theta=\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right)$ $[2\pi]$ où M est l'image de z dans le plan complexe P.

Vocabulaire

L'écriture $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ où $r>0$ est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z.

Notation

On note parfois $\mathbf{z=[r,\theta]}$.

Définition
Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans P. On appelle **argument** de z et on note **$\arg(\mathbf{z})$**, toute mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$. On écrit : $\arg(z)=\theta[2\pi]=\theta+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

$Arg(z)$ est la mesure principale de $\arg(z)$ non utilisé dans ce document.

Conséquence
Pour tous nombres complexes non nuls z et z', $z=z'$ si et seulement si $|z|=|z'|$ et $\arg(z)=\arg(z')[2\pi]$.

Propriétés

Pour tout nombre complexe z non nul et tout réel α strictement positif, on a :
- $\arg(\bar{z})=-\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(-z)=\arg(z)+\pi[2\pi]$
- $\arg(\alpha z)=\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(-\alpha z)=\arg(z)+\pi[2\pi]$

Cas particulier
Soit α un réel strictement positif.
- $\arg(\alpha)=0[2\pi]$
- $\arg(-\alpha)=\pi[2\pi]$
- $\arg(i\alpha)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg(-i\alpha)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Théorème

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a :
- $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$
- $\arg(z^n)=n\arg(z)[2\pi]$; $n\in\mathbb{Z}$

Propriétés

Pour tous réels θ et θ' et pour tout entier relatif n, on a :

$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$,

$e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$,

$e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$,

$e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$

Remarque

Soit z un nombre complexe non nul. Soit M son image dans le plan complexe. Si $r = |z|$ et $\theta = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)[2\pi] = \arg(z)$ alors $z = re^{i\theta}$.

Conséquence

Pour tout réel $r > 0$ et tout réel θ, on a : $-re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$; $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$.

Propriété

Soient trois points A, B et C d'affixes respectives c, b et c tels que $B \neq A$ et $C \neq A$.

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)$

Propriété

Soit un réel θ. L'image d'un point M d'affixe z par la rotation de centre O (origine du repère) et d'angle θ est le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta}z$.

L'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \mapsto z'$ est dite associée à la rotation de centre O et d'angle θ.

Formule d'Euler

Pour tout réel θ, on a : $\mathbf{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ et $\mathbf{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$.

Conséquences

Pour tout entier n, on a : $\mathbf{\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}}$; $\mathbf{\sin n\theta = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}}$.

Vocabulaire

Le procédé qui consiste à écrire $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ est appelé **linéarisation**.

Théorème

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c complexes et $a \neq 0$) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z_1 = \dfrac{-b+\sigma}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sigma}{2a}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$ et σ est une racine carrée de Δ.

Chapitre : *FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN*

1) DEFINITION ET CONSEQUENCES

Définition : La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est une fonction définie et continue sur]0 ; + ∞[. Elle admet donc une primitive et une seule définie sur]0 ; +∞[qui s'annulant en $x_0 = 1$. Cette primitive, notée ln, est appelée logarithme népérien.

Propriété 1 :

- L'ensemble de définition de la fonction ln est]0 ; + ∞[.
- La fonction ln est dérivable sur]0 ; +∞[et pour tout nombre réel x de]0 ; +∞[, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$
- ln 1 = 0.

ln est dérivable sur]0 ; +∞[donc ln est continue sur]0 ; +∞[. On a $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ et $\forall x \in \left]0 : +\infty\right[, \frac{1}{x} > 0$ donc ln est strictement croissante sur]0 ; + ∞[; ce qui permet de dire que ln est une bijection de]0 ; + ∞[sur ln(]0 ; + ∞[)

Propriété 2 : Quels que soient les nombres réels a et b strictement positifs :

- ln a = ln b si et seulement si a = b
- ln a > ln b si et seulement si a > b

Remarque : Puisque ln1 = 0, la propriété 2 implique que :

- ln x < 0 si et seulement si 0 < x < 1
- ln x > 0 si et seulement si x > 1

2) PROPRIETES LIEES A LA DERIVATION

La fonction ln est dérivable sur]0 ; + ∞[et $(\ln)'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$$(\ln)'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} \Leftrightarrow (\ln)'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} \Leftrightarrow (\ln)'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution : $\forall x > 0, f(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

a) Dérivée de $\ln\circ u$

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I, la fonction $\ln\circ u$ est dérivable sur I et $(\ln\circ u)' = \frac{u'}{u}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur]- ∞ ; - 3[par $f(x) = \ln\frac{x+3}{x-2}$. Calculons f '(x).

Posons $u(x) = \frac{x+3}{x-2}$ donc $u'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$; alors $f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} \times \frac{x-2}{x+3} = \frac{-5}{(x-2)(x+3)}$

b) Recherche de primitives

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors les primitives de la fonction $f = \frac{u'}{u}$ sont les fonctions F_k définies sur I par $F_k(x) = (\ln\circ u)(x) + k$ où k est une constante réelle.

Chapitre : ***Fonctions exponentielles- Fonctions puissances***

Définition

La fonction exponentielle, notée **exp**, est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

$\boldsymbol{ln}:]\mathbf{0};\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{exp}:\ \mathbb{R}\longrightarrow]\mathbf{0};\ +\infty[$ ou encore :

Pour tout réel x et pour tout réel $y>0$, $y=\exp x$ si et seulement si $x=\ln y$.

∗ En particulier on a :

- $\mathbf{\exp 0 = 1}$ **car** $\mathbf{\ln 1 = 0}$
- $\mathbf{\exp 1 = e}$ **car** $\mathbf{\ln e = 1}$
- $\mathbf{\exp(-1) = \frac{1}{e}}$ **car** $\mathbf{\ln\frac{1}{e} = -1}$

Conséquences

- Pour tout réel x, $\mathbf{\ln(\exp \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}}$
- Pour tout réel x de $]0\ ;+\infty[$, $\mathbf{\exp(\ln \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}}$
- Pour tout réel x, $\mathbf{\exp \boldsymbol{x} > 0}$

Remarque

La fonction $exp: \mathbb{R}\longrightarrow]0;\ +\infty[$ est, comme la fonction $\ln$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x)=0$.

Notation $\mathbf{e}^x$

Pour tout entier relatif n, $\ln e^n = n$. Par définition de la fonction $\exp$.

$\ln e^n = n \Leftrightarrow e^n = \exp(n)$.

On convient d'étendre cette égalité à tout réel x.

Définition

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $e^x=\exp(x)$. D'où on a :

- $e^1 = e$
- $e^0 = 1$
- $e^{-1}=\frac{1}{e}$
- Pour tout réel x, $\ln e^x = x$
- Pour tout réel $x>0$, $e^{\ln x}=x$
- Pour tout réel x, $e^x>0$

- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Formules fondamentales

Pour tous réels *a* et *b*, on a :

- $\mathbf{e}^{a+b} = \mathbf{e}^a \times \mathbf{e}^b$
- $\mathbf{e}^{-b} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{e}^b}$
- $\mathbf{e}^{a-b} = \dfrac{\mathbf{e}^a}{\mathbf{e}^b}$
- $\left(\mathbf{e}^a\right)^p = \mathbf{e}^{ap}$; $p \in \mathbb{Z}$

Ces formules montrent l'intérêt de la notation e^x, car ces résultats se retiennent en utilisant les règles habituelles sur les exposants.

Théorème

$\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Théorème

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Ensemble de définition

Soit *u* une fonction définie sur un intervalle *I*. L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto u(x)$.

Limites

a. Soient *u* et *f* deux fonctions numériques définies sur un intervalle *I*. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty \,;\, +\infty\}$.

- $\lim_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} e^{u(x)} = 0$
- $\lim_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} e^{u(x)} = +\infty$

$\lim_{x \to x_0} u(x) = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} e^{u(x)} = e^a$

Théorème

Si *u* est une fonction dérivable sur un intervalle *I*, alors la fonction e^u est dérivable sur *I* et :

$\left(e^u\right)' = u'e^u$

Théorème

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle *I*. La fonction f définie sur I par $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ admet des primitives sur I et ces primitives F sont définies par : $F(x) = e^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Equations

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$, a et b sont des réels.
- $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$, $a > 0$

Inéquations

- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$, a et b sont des réels.
- $e^x < a \Leftrightarrow x < \ln a$, $a > 0$

Définition

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel b : $\mathbf{a^b = e^{b\ln a}}$.

Règles de calcul

Si $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors :

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$; $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $a^x \cdot a^{-x} = 1$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

Définition

On appelle **fonction puissance** α ($\alpha \in \mathbb{R}$) la fonction : $f_\alpha :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^\alpha \text{ avec } x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Conséquence

Pour tout $x > 0$, $x^\alpha > 0$.

Théorème

Si u est une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle *I*, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction u^α est dérivable sur *I* et $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$.

Conséquence

Sur l'intervalle *I*, u^α est une primitive de $\alpha u^{\alpha-1}u'$, ce que l'on peut énoncer :

Si $\alpha \neq -1$, alors $\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$ est une primitive de $u^\alpha u'$ ($u > 0$).

Cas particulier

Si $\alpha = -1$ on a : $u'u^{-1} = \frac{u'}{u}$ et une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u| + k$; $k \in \mathbb{R}$.

Théorème

Pour $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$.

Théorème

Pour tout réel α , $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et.

$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Chapitre : *Calcul intégral*

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et F une primitive de f sur I. Etant donnés deux éléments a et b de I, on pose : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Notation

Ce nombre est appelé intégrale de f entre a et b. On note souvent $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b$.

Remarque 1

La fonction $g : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f définie sur I, s'annulant en a.

Remarque 2

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,dx$, on peut remplacer la lettre x par n'importe quelle lettre. On a : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(z)\,dz = \ldots$ On dit que x est une **variable "muette".**

Théorèmes

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a, b et c sont trois réels de I. F et G des primitives respectives des fonctions f et g ; α et β deux réels quelconques. On a :

* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
* $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (inversion des bornes)
* $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ (relation de Chasles)
* $\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$ (linéarité de l'intégrale)
* Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ (positivité)

  Remarque

  La réciproque est fausse.

Conséquence

Si $a \leq b$ et $f \leq g$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ (comparaison d'intégrales).

Remarque

La réciproque est fausse.

Propriété 1

Soient *m* et *M* des nombres réels. Soit *f* une fonction continue et bornée sur $[a\ ;\ b]$ telle que pour tout réel *x* de $[a\ ;\ b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Si $a < b$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

Propriété 2

Soit *k* un nombre réel positif, *f* une fonction continue et bornée sur $[a\ ;\ b]$ telle que pour tout réel *x* de $[a\ ;\ b]$, $|f(x)| \leq k$, alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq k(b-a)$.

Théorème

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I* centré en 0. Soit *a* un élément de *I*.

- Si *f* est paire alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$.
- Si *f* est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$

Théorème

Soit *f* une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période *T*. Pour tout réel *a*, on a : $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$

Théorème

Soient *u* et *v* deux fonctions dérivables sur un intervalle *I* et dont les fonctions dérivées sont continues sur *I*.

Si *a* et *b* sont deux éléments de *I*, alors : $\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$

Théorème

Soit *f* une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$. Dans un repère orthogonal $(0\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, l'aire du domaine défini par $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ est $\int_a^b f(t)\,dt$. u.a

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a\ ;b]$ telle que pour tout x de $[a\ ;b]$, $f(x) \leq 0$. Dans un repère orthogonal l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de f et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est : $\int_a^b -f(x)dx \ \ u \cdot a$

Théorème 3 (admis)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\ ;b]$ telles que pour tout x de $[a\ ;b]$, $f(x) \leq g(x)$. Dans un repère orthogonal l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de f et g et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est : $\mathscr{A} = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx \ \ u \cdot a$

Chapitre : *EQUATIONS DIFFERENTIELLES*

I. DEFINITION

On appelle équation différentielle, une équation où l'inconnue est une fonction f de IR vers IR et dans laquelle apparaît au moins une des dérivées successives de f.
Exemples : $y' + 2y = x^2$ est une équation différentielle du premier ordre et
$y'' - 4y' + 7y = 0$ est une équation différentielle du second ordre.
Remarque : résoudre ou intégrer une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions solutions de cette équation.

II. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $y' - my = 0$ ($m \in$ IR).

- La fonction nulle est solution de (E).
- Déterminons les solutions non nulles de (E).

On a : $y \neq 0$, $y' - my = 0 \Leftrightarrow y' = my \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = m \Leftrightarrow \ln|y| = mx + c$; $c \in$ IR $\Leftrightarrow |y| = e^{mx + c}$; $c \in$ IR
$\Leftrightarrow y = e^{mx + c}$ ou $y = - e^c e^{mx} \Leftrightarrow y = Ke^{mx}$ avec $K \in$ IR*.

Propriétés

- Les solutions de l'équation différentielle $y' - my = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^{mx}$ avec $K \in$ IR.
- Il existe une unique solution de cette équation différentielle vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (x_0 et y_0 sont des réels donnés).

III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE : $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \in$ IR*)

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \in$ IR*) sont les fonctions :
$x \mapsto A\cos \omega x + B\sin \omega x$ avec A et B des nombres réels.
Il existe une unique solution f de cette équation différentielle vérifiant des conditions initiales données.

3)Equation de la forme $y''+\omega^2 y = 0$ $\omega \in R$

Les solutions sont de la forme $A\cos\omega x + B cos$

EPREUVES

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
....
Série D

Année 2011
Session normale
Epreuve du 1er tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (4 points)

Dans le tableau suivant figurent les résultats d'une enquête réalisée dans un magasin pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de chaussures, en fonction de son prix de vente.

Prix en francs: x_i	350	400	450	500	550	600
Nombre d'acheteurs potentiels: y_i	140	120	100	90	80	55

1) Représenter le nuage de points $M_i\,(x_i, y_i)$ correspondant à cette série statistique dans un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ tel que 1cm représente 100 francs sur l'axe des abscisses et 1cm représente 20 acheteurs sur l'axe des ordonnées.

2) On appelle G_1 et G_2 les points moyens des sous-nuages constitués d'une part par les trois premiers points, d'autre part par les trois derniers points.

a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_2.

b) Placer les points G_1 et G_2 sur la figure et tracer la droite (G_1G_2).

c) Déterminer une équation de la forme $y = mx + p$ de la droite (G_1G_2).

3) Déduire du **2-c)** une estimation :

a) du nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de chaussures vendu 650 F.

b) du prix d'un modèle dont le nombre d'acheteurs potentiels est 150.

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Soient les nombres complexes : $a = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} + \dfrac{i(\sqrt{3}-1)}{4}$ et $z_0 = 6 + 6i$.

On note A_0 le point d'affixe z_0 et pour tout n entier naturel non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par : $z_n = a^n z_0$.

1)

a) Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique. Ecrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) Exprimer z_3 et z_7 en fonction de z_1 et a^2 ; en déduire l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle.

2) Pour tout n entier naturel, on pose $|z_n| = r_n$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = 12 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

b) En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Déterminer la limite de la suite (r_n) et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Problème (12 points)

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ et de courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan (unité graphique : 4 cm).

Partie A

1)

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3) Soit A le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 0.

a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en A.

b) Montrer que le point A est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$.

4) Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $y = 1$; $x = 0$; $x = n$. $\mathcal{A}_n$ désigne l'aire de la région D_n exprimée en unité d'aire.

1) Hachurer la région D_2 sur le graphique (pour $n = 2$).

2) Montrer que $\mathcal{A}_n = \ln 2 - \ln(1 + e^n) + n$.

3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n$.

Partie C

1) Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{ae^x}{1+e^x} + \frac{be^x}{(1+e^x)^2}.$$

2) Soit α un réel négatif. On note $V(\alpha)$ le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe $(\mathcal{C})$ obtenue pour $\alpha \leq x \leq 0$. $V(\alpha)$ est exprimé en unité de volume.

a) Exprimer $V(\alpha)$ en fonction de α.

b) Déterminer la limite de $V(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

Partie D

Soit (Γ) la courbe paramétrée de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 \end{cases}, t \geq 1.$$

1) Déterminer une équation cartésienne de (Γ).

2) Expliquer comment à partir de $(\mathcal{C})$ on obtient (Γ).

Construire (Γ) en pointillés.

On donne : $f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0,62$; $f(1) \simeq 0,73$; $f(2) \simeq 0,88$.

Fin

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
....
Série D

Année 2012
Session normale
Epreuve du 1er tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (4points)

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : y'' + 4y = 0 \text{ et } (E_2) : y'' + y = 0$$

1) Déterminer la solution de l'équation (E_1) dont la courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ passe par le point $A(0, -2)$ et admet en ce point une tangente horizontale.
2) Déterminer la solution g de l'équation (E_2) vérifiant : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
3) Soit $(\mathcal{C})$ la courbe définie par le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = -2\cos 2t \\ y(t) = \cos t - \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la période commune des fonctions x et y ; comparer la position des points $M(t)$ et $M(t + \pi)$, puis en déduire un élément de symétrie de $(\mathcal{C})$.
Justifier le choix de $[0, \pi]$ comme ensemble d'étude.
b) Etudier les fonctions x et y sur $[0, \pi]$ et dresser leur tableau de variations conjoint.
c) Réprésenter la courbe $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On précisera les tangentes particulières ainsi que les tangentes en O.
NB : $\sqrt{2} \simeq 1,4$

Exercice 2 (4 points)

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On s'intéresse au nombre porté par la face cachée.
Pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note P_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres P_1, P_2, P_3 et P_4 dans cet ordre forment une progression arithmétique.
1) Sachant que $P_4 = 0,4$; montrer que $P_1 = 0,1$; $P_2 = 0,2$ et $P_3 = 0,3$.
2) On lance le dé trois (3) fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
a) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
3) On lance dix (10) fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants.
On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
a) Pour $0 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $(X = i)$.

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le resultat obtenu.

c) Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$.

On donnera une valeur arrondie au millième.

4) On lance n fois le dé, les lancers étant supposés indépendants. On note u_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au $n^{ième}$ lancer.

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique et qu'elle converge.

b) Calculer $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ en fonction de n puis étudier la convergence de la suite (S_n).

c) Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n \geq 0,999$.

<u>NB</u> : On donne : $(0,6)^{10} \simeq 0,00604$; $\ln(0,001) \simeq -6,90$; $\ln(0,6) \simeq -0,51$.

<u>Problème</u> (12 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x + \ln|1-x|}{1-x}$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

<u>Partie A</u>

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
En déduire les asymptotes à $(\mathcal{C})$.

2) Soit f' la fonction dérivée de f, calculer $f'(x)$ puis étudier son signe.
En déduire le sens de variation de f.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) Montrer que le point $I(1, -1)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$.

5) Tracer $(\mathcal{C})$ et les asymptotes.

<u>Partie B</u>

Soit les fonctions u et v définies sur l'intervalle $]1, \infty[$ par : $u(x) = \dfrac{-1}{1-x}$ et $v(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{x-1}$

1) Déterminer une primitive de chacune des fonctions u et v sur $]1, +\infty[$.

2) Vérifier que pour tout réel $x > 1$; $-1 - f(x) = u(x) + v(x)$.

3) Calculer, en cm², la valeur exacte de l'aire S du domaine plan compris entre $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $y = -1$, $x = 2$ et $x = 3$

<u>Partie C</u>

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4 - e^{-u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer, par récurrence, que pour tout entier non nul n, $3 < u_n < 4$.

2)

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de même signe.

b) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

3) Etudier la convergence de la suite (u_n).

<u>NB</u> : On donne : $e^{-3} \simeq 0,05$ et $e^{-4} \simeq 0,02$.

Fin

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
....
Série D

Année 2013
Session normale
Epreuve du 1er tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)
Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (4 points)

~~Le plan complexe~~ L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.
Soient $A\,(1,2,3)$; $B\,(3;0;3)$ et $C\,(3,2,1)$.

1) Calculer AB ; BC et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

2) Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Trouver les coordonnées de D. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
En déduire que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$

3) Déterminer la distance séparant le point O au plan du quadrilatère $ABCD$.

4) Soit I le milieu de $[AC]$. Calculer OI, en déduire que I est le projeté orthogonal de O sur le plan $(ABCD)$.

5) Démontrer que les plans (OAC) et (OBD) sont orthogonaux.

6) Déterminer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

7) Déterminer le volume de la pyramide de sommet O et de base, le quadrilatère $ABCD$.

Exercice 2 (4 points)

On considère la suite de terme général (U_n) défini par : $U_n = \dfrac{3U_{n-1} - 1}{U_{n-1} + 1}$; $n \geq 3$ et par son premier terme $U_2 = 3$.

1) Calculer U_3 ; U_4 et en déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2)

a) Montrer que (U_n) est minorée par 1.

b) Montrer que (U_n) est décroissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) On pose $V_n = \dfrac{U_n + 1}{U_n - 1}$

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison. (On pourra exprimer V_n et V_{n-1} en fonction de U_{n-1})

b) Exprimer V_n, puis U_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de (U_n).

Problème (12 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x\ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}\,, \vec{j}\right)$, unité graphique 2 cm.

Partie A

1) Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x}{x+1}$ si $x \geq 0$.
Déterminer le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$ et en déduire son signe sur $[0, +\infty[$.

2)

a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

3)

a) Calculer $f'(x)$ suivant les valeurs de x et vérifier que pour tout $x \geq 0$; $f'(x) = g(x)$.

b) Montrer que pour tout $x < 0$, on a $f'(x) > 0$.

c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f'(x) > 0$.

d) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

e) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f'(x) \geq 0$
Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f'(x) > 0$

4)

a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim_{x \to -\infty} \left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right]$. (On pourra poser $X = \dfrac{1}{x}$)

c) Montrer que la droite (D) d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

d) Préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D) pour $x < 0$. (On admettra que $x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \leq 1$ pour $x < 0$).

5) Tracer $(\Delta) : y = x$; $(D) : y = x + 1$ et $(\mathcal{C})$ dans le repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, unité graphique 2 cm.

__Partie B__

1)

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}+$, on a :
$\dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

b) Déduire au moyen d'une intégration par parties le calcul de $\displaystyle\int_0^{e-1} f(x)dx$.

2) Calculer en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (Δ) ; $(\mathcal{C})$ et les droites d'équation : $x = 0$ et $x = e - 1$.

3) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$

a) Montrer que h réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Construire la courbe $(\mathcal{C}')$ de h^{-1}dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

4) Quelle est l'aire $\mathcal{A}'$ en cm^2 de la boucle délimitée par $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

__Partie C__

On considère la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\ln(-t)} \\ y(t) = \dfrac{t}{\ln(-t)} \end{cases} \text{avec } t \in]-1, 0[$$

1) Déterminer une équation cartésienne de (Γ).

2) Comment obtient-on la courbe (Γ) à partir de la courbe $(\mathcal{C})$ de f.

3) Construire (Γ) en pointillés dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Fin

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
....
Série D

Année 2011
Session normale
Epreuve du 2ème tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (4 points)

On considère la suite (I_n) définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \quad , \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1) Calculer I_0, $I_0 + I_1$ et en déduire I_1.
2) Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n.
3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive.
4) Montrer que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5) En déduire que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 (4 points)

L'espace étant rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ unité de longueur 1cm, on considère les points : $A(3;2;4)$; $B(0;3;5)$; $C(0;2;1)$; $D(3;1;0)$ et $F(1;2;3)$
1) Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2) Soit E le point défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$. Calculer les coordonnées de E.
3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du parallélogramme $ABCD$.
4) Calculer le volume V en cm^3 du prisme droit de base $ABCD$ et de hauteur $[AE]$.
5) Le point F appartient-il à la droite (AB) ? Justifier la réponse.

Problème (12 points)

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et l'unité est 2 cm.

On placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f(x) = (2 - \frac{2}{x})(\ln x - 1)$ · (C) désigne sa courbe représentative relative au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$.
3) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2\ln x + 2x - 4$.
   a) Etudier le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1;2]$.
   c) En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$.

4)

a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur $]0;+\infty[$.

b) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

c) Calculer $f(1)$ et $f(e)$.

5)

a) Etudier le signe de f sur $]0;+\infty[$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation du résultat obtenu.

c) Construire $(\mathcal{C})$. On prendra $\alpha=1,75$ et $f(\alpha)=-0,6$.

6) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=-f(x)$, $(\mathcal{C}')$ désigne sa courbe représentative. Sans étudier h, construire $(\mathcal{C}')$ dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Justifier la construction de $(\mathcal{C}')$.

Partie B

Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$. (Γ) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1)

a) Que représente F pour f ?

b) Sans calculer $F(x)$, donner le sens de variation de F.

c) Que peut-on dire des tangentes à (Γ) aux points d'abscisses 1 et e ?

(on pourra utiliser **4-c)** de la partie **A)**

2)

a) Le nombre réel x étant strictement positif, calculer $\int_1^x \ln t\,dt$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

b) Montrer que, pour tout réel $x>0$, on a : $f(x)=2\ln x-2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{2}{x}-2$.

c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du domaine plan limité par $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

On donne : $\ln 2\simeq 0,7$ et $\ln 3\simeq 1,1$.

Fin

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
....
Série D

Année 2012
Session normale
Epreuve du $2^{\text{ème}}$ tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (5 points)

1)
On considère le polynôme P défini pour tout Z de l'ensemble $\mathbb{C}$ par :

$$P(Z) = Z^3 - 6Z^2 + 12Z - 16$$

a) Soit $Z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que si $P(Z_0) = 0$ alors $P(\overline{Z}_0) = 0$ où $\overline{Z}_0$ est le conjugué de Z_0.
b) Calculer $P(1 + i\sqrt{3})$; puis factoriser $P(Z)$.
c) Déduire les solutions de l'équation $P(Z) = 0$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{v}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).
Soit A, B, et C les points d'affixes respectives $a = 4$; $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \overline{b}$ ou $\overline{b}$ est le conjugué de b.
a) Placer les points A ; B et C sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
b) Quelle est la nature exacte du triangle ABC?

3) Soit K le point d'affixe $Z_K = -\sqrt{3} + i$, le point F image de K par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
a) Déterminer les affixes respectives de F et G.
b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4) Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$
a) Calculer l'affixe Z_H de H puis montrer que le parallélogramme $COFH$ est un carré.
b) Quelle est la nature du triangle AGH ?

On donne $\sqrt{3} = 1,7$.

Exercice 2 (3 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\right)$. On donne les points $A(2,0,0)$; $B(0;3;0)$ et $C(0;0;-2)$.

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

2) Soit $H(a;b;c)$ le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$?
En déduire que : $3a + 2b - 3c - 6 = 0$.
b) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\vec{u}$?
En déduire qu'il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} a = -6t \\ b = -4t \\ c = 6t \end{cases}$$

c) Déterminer la valeur de t puis donner les coordonnées de H.

d) Calculer la distance du point O au plan (ABC).

3) Calculer le volume du tétraèdre de base ABC et de sommet O.

Problème (12 points)

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{-\ln|x|}{x} + x - 2$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln|x|$

1) Etudier les variations de la fonction g et dresser le tableau de variations.

2) Calculer $g(-1)$ et $g(1)$ puis déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale.

2)

a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D).

3)

a) Calculer $f'(x)$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4)

a) Montrer que le point I, intersection des deux asymptotes est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C})$.

b) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ ainsi que les asymptotes.

5)

Discuter graphiquement et en fonction du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$, $f(x) = m \quad (m \in \mathbb{R})$.

Partie C

Soit α un réel tel que $-1 \leq \alpha < 0$ et soit (Δ) la région du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, les droites d'équations respectives $x = -1$; $x = \alpha$; $y = x - 2$.

1)

a) Calculer en fonction de α l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de (Δ).

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha < 0}} \mathcal{A}(\alpha)$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) On donne la suite définie pour tout entier $n > 0$ par : $u_n = \int_1^n f(x)\, dx$.

a) Calculer u_n en fonction de n.

b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Fin

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
....
Série D

Année 2013
Session normale
Epreuve du 2ème tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)
Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (4 points)

1) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont quatre portent le chiffre 1 et six portent le chiffre 5.
On tire simultanément deux de ces boules.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : << tirer deux boules portant chacune le chiffre 1 >>
B : << tirer deux boules portant chacune le chiffre 5 >>
C : << tirer deux boules portant des chiffres différents>>.

2) On suppose maintenant que l'urne contient a boules portant le chiffre 1 et b boules portant le chiffre 5 avec $a + b = 10$ $(1 \leq a \leq 9)$ et $(1 \leq b \leq 9)$.
Soit X la variable aléatoire égale au total des points marqués sur les deux boules tirées simultanément.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ en fonction de a.
c) Pour quelles valeurs de a, a-t-on $6 < E(X) < 8$?

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, unité graphique : 2 cm.

1) Soit le nombre complexe $z_0 = 1 + i$.
a) Montrer que z_0 est solution de l'équation (E) définie par
$z^3 - (7+i)z^2 + 2(8+3i)z - 10(1+i) = 0$.
b) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

2) On considère les points A, B et C du plan , d'affixes respectives $1+i$, $3+i$ et $3-i$.
a) Calculer et écrire sous forme exponentielle $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.
b) En déduire la nature exacte du triangle ABC.
c) Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et compléter la figure au fur et à mesure.
d) Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle BAC.
Déterminer l'affixe du centre G et le rayon r du cercle.

3) Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant la relation $|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$.
a) Caractériser géométriquement l'ensemble (Δ).
b) Justifier que le point F d'affixe $4 + 2i$ appartient à (Δ).
c) Déterminer l'affixe du point E de (Δ) situé sur l'axe des ordonnées.

4) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $CEAF$? Justifier votre réponse.

Problème (12 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) définie par : (E) : $\frac{1}{2}y' + y = 3e^{-2x} + 2$.

1) Déterminer le réel a, tel que la fonction v définie par $v(x) = axe^{-2x} + 2$ soit une solution de l'équation (E).

2) Donner les solutions de l'équation (E') : $\frac{1}{2}y' + y = 0$

3)

a) Montrer que u est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E').

b) En déduire les solutions de (E).

4) Déterminer la solution particulière h de l'équation (E) vérifiant $h(0) = 0$.

Partie B

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2(3x-1)e^{-2x} + 2 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{x \ln x}{1+x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Unité graphique : 4 cm.

I) Etude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x + \ln x$.

1)

a) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

b) Déterminer le sens de variations de g.

c) Dresser le tableau de variations de g.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$. Montrer que α appartient à l'intervalle $]0,2; 0,3[$.

3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

II) Etude et représentation graphique de f.

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Etudier la dérivabilité de f en 0. Donner une interprétation graphique.

3) Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat obtenu.

5) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

(On montrera que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$)

6) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$ et déterminer le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe (Ox).

7) Dresser le tableau de variations de f.

8) Construire $(\mathcal{C}_f)$.

Partie C

Soit $\lambda < 0$. On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations : $x = \lambda$, $x = 0$, $y = 0$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

1) On pose $F(x) = (ax + b)\, e^{-2x}$. Déterminer a et b pour que $F'(x) = (3x - 1)\, e^{-2x}$.

2) Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2.

3) Calculer $\lim_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

On donne : $\ln 2 = 0,70$; $\ln 3 = 1,10$; $\ln 5 = 1,61$.

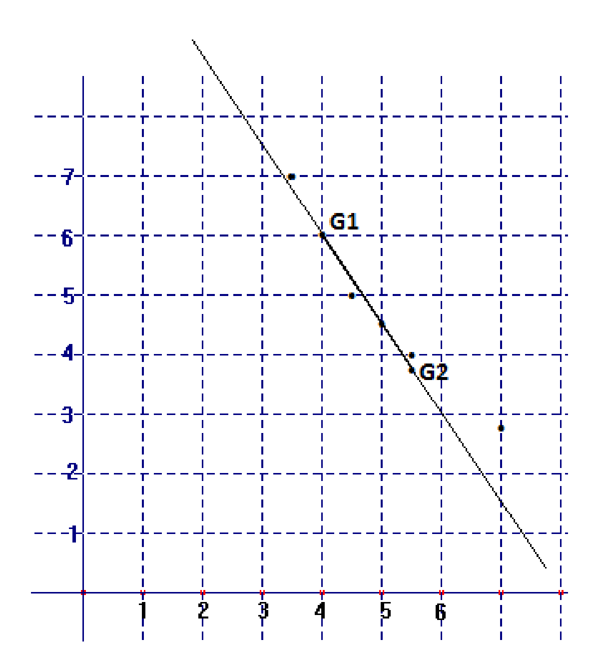
Fin

CORRIGE

Session Normale 2011 ; 1er tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE 1



1) Voir figure ci- contre
2) a) $G_1(400,120)$ $G_2(550, 75)$
   b) Voir figure ci-contre
   c) $y = mx + p$ $m = -\frac{3}{10}$; $p = 240$

3) a) $650 \times (-0{,}3) + 240 = 45$

   b) $150 = -0{,}3x + 240$; le nombre est 300.

EXERCICE 2

1)

a) $z_1 = az_0 = (6+6i)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}\right)=3+3i\sqrt{3}=6e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{3}+i}{4}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $z_3 = a^3z_0 = a^2(az_0) = a^2z_1$; $z_7 = a^7z_0 = (a^2)^3z_1$. $z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$; $z_7 = \frac{3}{4}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

2)

a) $r_n = |z_n| = |a^n|\times|z_0| = |a^{n-1}|\times|z_1| = |a^2|^{\frac{n-1}{2}}\times|z_1| = 6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

b) La suite $(r_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $6\sqrt{2}$.

c) $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Quand n tend vers $+\infty$, le point A_n tend vers le point O.

PROBLEME

PARTIE A

1) a) D_f = IR ; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0$.

2) f'(x) = $\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$. f'(x) > 0 sur IR ; f est donc strictement croissante.

Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f	0	↗	1

3) a) Equation de (T) y = xf'(0) + f(0) ⇔ y = $\frac{1}{4}$ x + $\frac{1}{2}$.

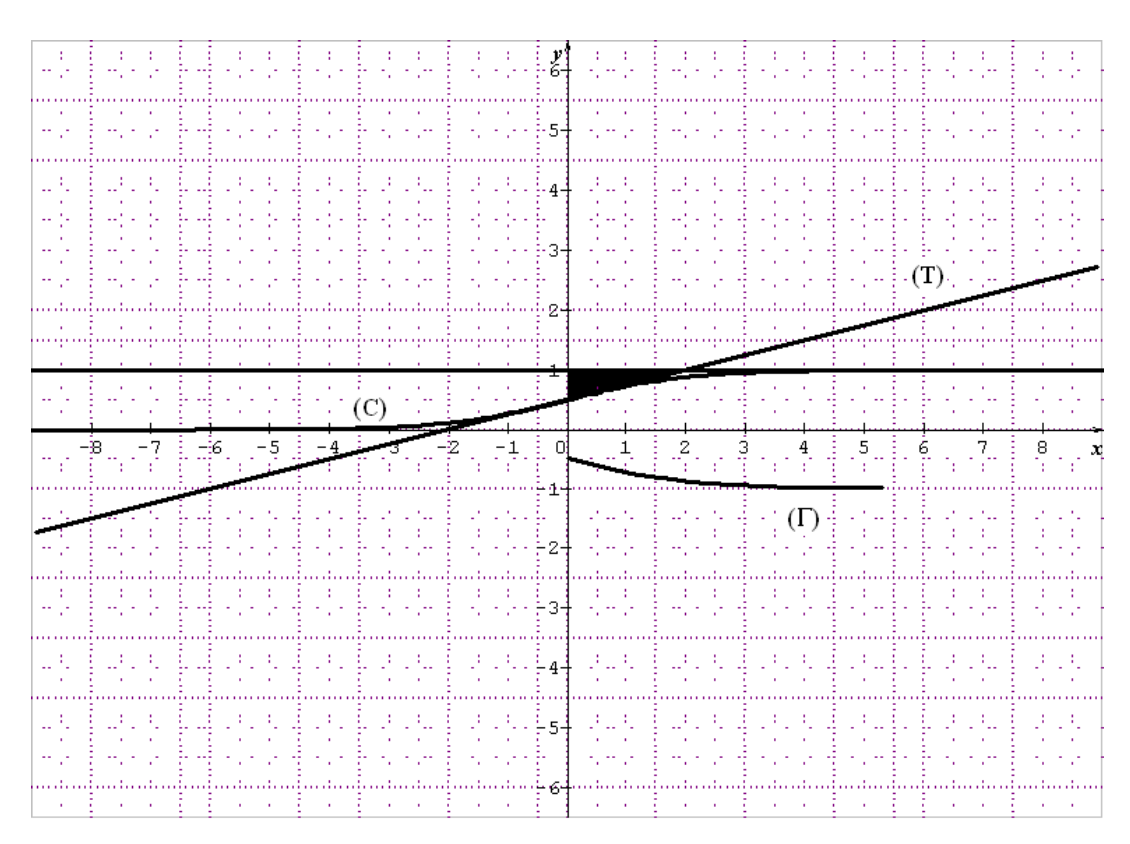
b) Montrer que A (0, $\frac{1}{2}$) est un centre de symétrie pour (C).

Soit M un point de (C) de coordonnées (x, y) dans (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) et (X,Y) dans (A, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ donne $\begin{cases} x = X \\ y = Y + \frac{1}{2} \end{cases}$.

y = f(x) équivaut à : Y = $-\frac{1}{2} + \frac{e^X}{1+e^X} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^X - 1}{e^X + 1}\right)$. La fonction F : X $\mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{e^X - 1}{e^X + 1}\right)$ est définie sur 3 et pour tout X ∈ 3, -X∈ 3, on a : F(-X) = F(X) ; F est impaire ; donc A (0, $\frac{1}{2}$) est bien un centre de symétrie pour (C).

4)



PARTIE B

1) Voir figure

2) A_n = $\int_0^n [1-f(x)]dx\,ua = [x]_0^n - \int_0^n \frac{e^x}{1+e^x}dx = \left[x-\ln(1+e^x\right]_0^n = n-\ln(1+e^n)+\ln 2$

$= \ln 2 - \ln(1+e^n) + n$

3) – ln(e^n+1)+n = - ln(e^n+1) + lne^n = $\ln\frac{e^n}{1+e^n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty}[\ln 2 + \ln\frac{e^n}{1+e^n}] = \ln 2$

PARTIE C

1) $\frac{ae^x}{1+e^x} + \frac{be^x}{\left(1+e^x\right)^2} = \frac{ae^{2x}+(a+b)e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$. On en déduit que a = 1 et b = - 1.

2) a) V(α) = $\pi\int_\alpha^0 [f(x)]^2\,dx\,uv$.

$$\int_\alpha^0 [f(x)]^2\,dx = \int_\alpha^0 \frac{e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}dx = \int_\alpha^0 \frac{e^x}{1+e^x}dx - \int_\alpha^0 \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx = \left[\ln(1+e^x)\right]_\alpha^0 + \left[\frac{1}{1+e^x}\right]_\alpha^0$$

V(α) =π [ln2 – ln(1+e^α) + $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{1+e^\alpha}$] × 64cm³.

b) $\lim_{\alpha \to -\infty} V(\alpha) = 64\pi(-\frac{1}{2} + \ln 2)$

PARTIE D

1) t = e^x avec x ≥ 0. y = $\frac{1}{1+e^x} - 1 = \frac{-e^x}{1+e^x}$.
2) L'équation de (Γ) est y = - f(x) avec x ≥ 0.. On obtient (Γ) en prenant le symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses pour x ≥ o. Pour la construction, voir figure.

Session Normale 2012 ; 1[er] tour

PROPOSITION DE CORRIGE

Exercice 1

$(E_1): y''+4y=0;\ (E_2): y''+y=0$

1. La solution recherchée est la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$,

$A\ et\ B$ réels, et vérifiant $f(0) = -2\ et\ f'(0) = 0$;

$f(0) = -2$ donne $A = -2$

Pour tout réel x, $f'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$; donc, $f'(0) = 0$ donne $B = 0$

Par conséquent, pour tout réel x, $f(x) = -2\cos 2x$

2. La solution g de (E_2) est telle que pour tout réel x, $g(x) = C\cos x + D\sin x$ avec les conditions initiales : $g(\frac{\pi}{2}) = -1\ et\ g'(\frac{\pi}{2}) = -1$; ce qui conduit à $g(x) = \cos x - \sin x$.

3. $(C): \begin{cases} x(t) = -2\cos 2t \\ y(t) = \cos t - \sin t \end{cases}, t \in ℝ$

a) La période commune des fonctions x et y est 2π car pour tout réel t,

$x(t+2\pi) = -2\cos 2(t+2\pi) = -2\cos(2t + 2\times 2\pi) = -2\cos 2t = x(t)$ et

$y(t+2\pi) = \cos(t+2\pi) - \sin(t+2\pi) = \cos t - \sin t = y(t)$

Comparaison de la position de $M(t)\ et\ M(t+\pi)$

Pour tout réel t, les coordonnées du point $M(t+\pi)$ sont telles que

$x(t+\pi) = -2\cos 2(t+\pi) = -2\cos(2t+2\pi) = -2\cos 2t = x(t)$ et

$y(t+\pi) = \cos(t+\pi) - \sin(t+\pi) = -\cos t + \sin t = -y(t)$; par suite, les points $M(t)\ et\ M(t+\pi)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

L'axe des abscisses est un élément de symétrie de (C).

Ensemble d'étude : $[0,\pi]$ car d'une part la période est 2π et d'autre part la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

b) Etude de x et y sur $[0,\pi]$

Cas de x

$x(t) = -2\cos 2t,\ donc\ x'(t) = 4\sin 2t$

$x'(t) = 0$ pour $t = 0\ ou\ t = \frac{\pi}{2}\ ou\ t = \pi$

Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $x'(t) > 0$; donc x est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Pour tout $t \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $x'(t) < 0$; donc x est strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

Cas de y

$y(t) = \cos t - \sin t;\ donc\ y'(t) = -(\sin t + \cos t) = -\sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4})$

$y'(t) = 0\ pour\ t = \frac{3\pi}{4}$

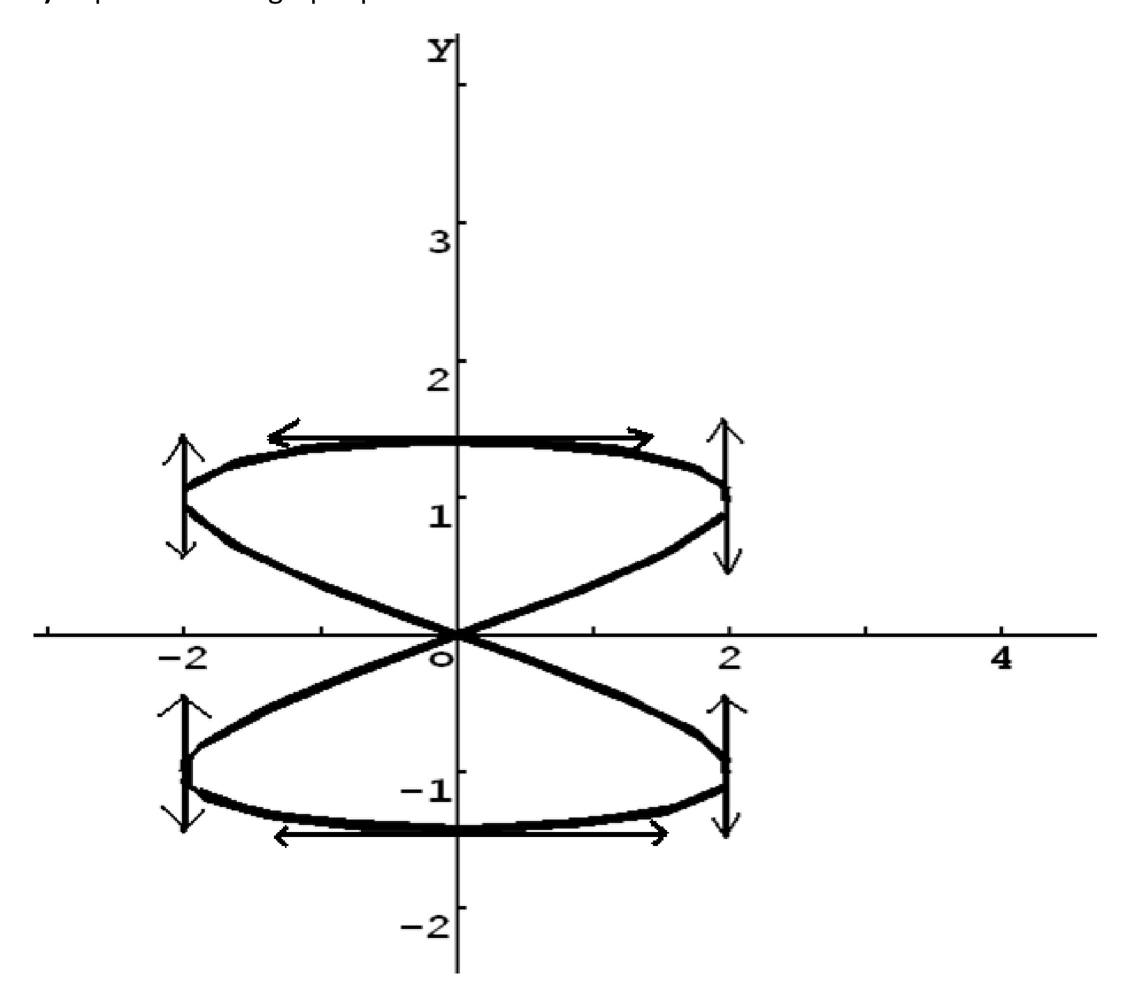
Pour tout $t \in [0, \frac{3\pi}{4}[$, $y'(t) < 0$; donc y est strictement décroissante sur $[0, \frac{3\pi}{4}]$

Pour tout $t \in]\frac{3\pi}{4}, \pi]$, $y'(t) > 0$; donc y est strictement croissante sur $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$

Tableau de variations de x et y

t	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$x'(t)$	0	+	0	-	(-4)	-	0
$x(t)$	(-2)	↗	2	↘	0	↘	(-2)
$y'(t)$	(-1)	-	(-1)	-	0	+	1
$y(t)$	1	↘	(-1)	↘	$(-\sqrt{2})$	↗	(-1)

c) Représentation graphique



Exercice 2

1. Soit r la raison de la progression arithmétique, alors $p_3 = p_4 - r$; $p_2 = p_4 - 2r$; $p_1 = p_4 - 3r$; $p_4 = 0{,}4$. Or, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, donc $r = \frac{4p_4 - 1}{6} = \frac{1{,}6 - 1}{6} = 0{,}1$; par suite, $p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}2;\ p_3 = 0{,}3$.

2. **a)** Les lancers étant deux à deux indépendants, la probabilité d'obtenir dans l'ordre croissant les nombres 1, 2, 4 est $p_1 \times p_2 \times p_4$; ce qui donne

$$p_1 \times p_2 \times p_4 = 0{,}1 \times 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}008.$$

b) Les différentes possibilités d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant sont : 1, 2, 3 ; 1, 2, 4 ; 1, 3, 4 et 2, 3, 4. Par conséquent, la probabilité recherchée est : $p_1 \times p_2 \times p_3 + p_1 \times p_2 \times p_4 + p_1 \times p_3 \times p_4 + p_2 \times p_3 \times p_4$, ce qui donne $0{,}05$.

3. X suit une loi binomiale de paramètres $n=10 \; et \; p=p_4=0,4$.

a) Pour tout i tel que $0 \leq i \leq 10$, $p(X=i)=C_{10}^{i}\times(0,4)^{i}\times(0,6)^{10-i}$

b) L'espérance mathématique de X est $E(X)=n\times p=10\times 0,4=4$

Cela signifie qu'en moyenne, en lançant dix fois le dé, on obtiendra 4 fois la face numérotée 4.

c) $p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-(0,6)^{10}=1-0,00604=0,99396$, d'où

$p(X\geq 1)=0,994$.

4.a) Soit n un entier naturel non nul. On obtient 4 pour la première fois au $n^{ième}$ lancer si et seulement si on ne l'a pas obtenu aux éventuels lancers précédents et qu'on l'a obtenu au $n^{ième}$. Comme les lancers sont indépendants, alors $u_n=(0,6)^{n-1}\times 0,4$.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,6.

Comme $|0,6|<1$, la suite (u_n) converge vers 0.

b) $S_n=u_1+u_2+.........+u_n, \; n\in \mathbb{N}^*$

S_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $u_1=0,4$; donc $S_n=u_1\dfrac{1-(0,6)^n}{1-0,6}=0,4\times\dfrac{1-(0,6)^n}{0,4}=1-(0,6)^n$.

Comme $|0,6|<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,6)^n=0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$.

c) $S_n\geq 0,999 \; équivaut \; à \; 1-(0,6)^n\geq 0,999$; ce qui donne $(0,6)^n\leq 0,001$. Par suite, comme ln est croissante, on obtient $\ln(0,6)^n\leq \ln 0,001$ ou encore

$n\ln(0,6)\leq \ln 0,001$.

Finalement, comme $\ln(0,6)<0$ à cause du fait que 0<0,6<1, l'inégalité

$n\ln(0,6)\leq \ln 0,001$ équivaut à $n\geq\dfrac{\ln 0,001}{\ln(0,6)}$; ce qui donne $n\geq\dfrac{-6,90}{-0,51}$, conduisant ainsi à $n\geq 13,529$.

La plus petite valeur recherchée de n est 14.

Problème

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $f(x) = \dfrac{x + \ln|1-x|}{1-x}$

Partie A

1. Calcul des limites de f aux bornes de $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \ln|1-x|}{1-x} = \lim_{x \to -\infty} [\frac{x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{1-x}]$$

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{1-x} = -1 \; et \; \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ avec X=1-x ; donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x + \ln|1-x|}{1-x} = -\infty \; car \; \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (x + \ln|1-x|) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x) = 0^+$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x + \ln|1-x|}{1-x} = +\infty \; car \; \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x + \ln|1-x|) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (1-x) = 0^-$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln(x-1)}{-(x-1)} = -1 \text{ car } \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1-x} = -1 \text{ et - } \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \text{ avec } X = x-1$$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1; \; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$; alors, la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote pour (C).

De même, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty; \; \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$; donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C).

2. Calcul de $f'(x)$ puis étude de son signe, et déduction du sens de variation de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, on a : $f'(x) = \dfrac{\ln|1-x|}{(1-x)^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $(1-x)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln|1-x|$.

Ainsi, on a : $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0 \; ou \; x = 2$; pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[, \; f'(x) > 0$ et pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, 2[, \; f'(x) < 0$.

A la lumière du signe de f' ; f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0] \; et \; [2, +\infty[$, et f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $[0, 1[\; et \;]1, 2]$.

3. Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	
$f(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	-2	↗	-1

4. Démonstration du fait que $I(1,-1)$ est un centre de symétrie pour (C).

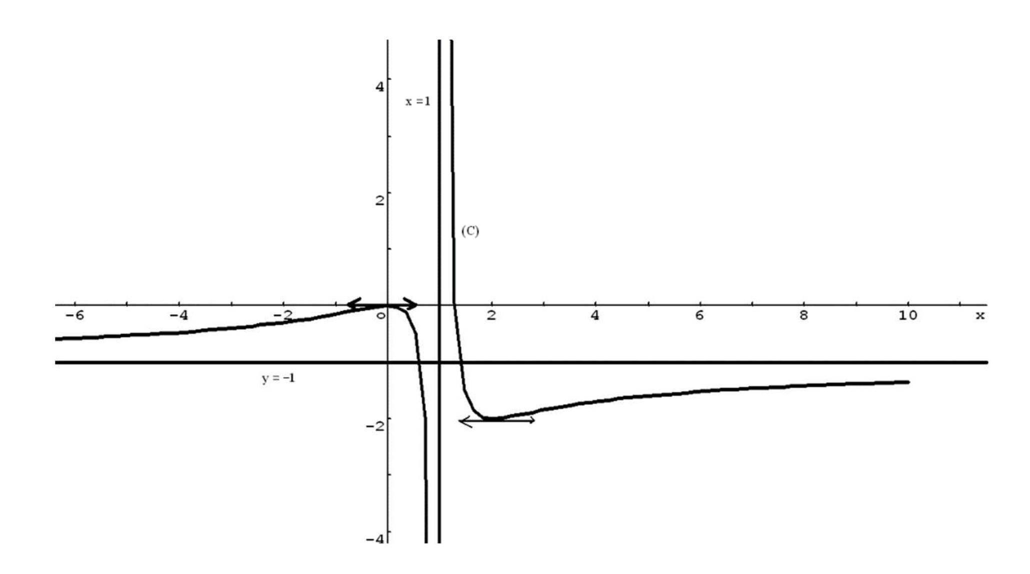
Soit M un point de (C) de coordonnées (x, y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et (X, Y) dans le repère $(I,\vec{i},\vec{j})$. On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$, ce qui donne $x = 1 + X \ et \ y = -1 + Y$.

Par suite, $y = f(x)$ équivaut à $-1+Y = \dfrac{1+X+\ln|X|}{-X}$ car $|-X| = |X|$, ce qui donne

$Y = -\dfrac{1+\ln|X|}{X}$.

La fonction $F : X \mapsto -\dfrac{1+\ln|X|}{X}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $X \in \mathbb{R}^*, -X \in \mathbb{R}^*$ et $F(-X) = -F(X)$. F est impaire, donc $I(1,-1)$ est bien un centre de symétrie pour (C).

5. Tracé de (C) avec les asymptotes



Partie B

u et v sont définies sur]1,+∞[par $u(x) = -\frac{1}{1-x}$ et $v(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1}$.

1. Détermination d'une primitive pour chacune des fonctions u et v.

Une primitive de u sur]1,+∞[est, par exemple, la fonction définie sur]1,+∞[par : $x \mapsto \ln(x-1)$. Une primitive de v sur]1,+∞[est, par exemple, la fonction définie sur]1,+∞[par : $x \mapsto \frac{1}{2}\ln^2(x-1)$ où $\ln^2(x-1) = \ln(x-1) \times \ln(x-1) = [\ln(x-1)]^2$.

2. Vérification de l'égalité $-1 - f(x) = u(x) + v(x)$ pour tout réel $x > 1$.

On a, d'une part $-1 - f(x) = -1 - \frac{x + \ln|1-x|}{1-x} = -1 - \frac{x + \ln(x-1)}{-(x-1)}$ car pour $x > 1$, $|1-x| = x-1$; donc $-1 - f(x) = -1 + \frac{x + \ln(x-1)}{x-1} = \frac{1 - x + x + \ln(x-1)}{x-1} = \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1}$ et

d'autre part $u(x) + v(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{\ln(x-1)}{x-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{\ln(x-1)}{x-1} = \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1}$.

On a bien l'égalité $-1 - f(x) = u(x) + v(x)$ pour tout réel $x > 1$.

3. Calcul de la valeur exacte en cm² de l'aire S.

$S = 4\int_2^3 |f(x) - (-1)| dx \ cm^2 = 4\int_2^3 (-1 - f(x)) dx \ cm^2$ car la droite d'équation $y = -1$ est au dessus de (C) sur [2,3]. Or, pour tout réel $x > 1$, $-1 - f(x) = u(x) + v(x)$; par suite,

$$S = 4\int_2^3 (u(x) + v(x)) dx \ cm^2 = 4[\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln^2(x-1)]_2^3 = (4\ln 2 + 2(\ln 2)^2) \ cm^2.$$

Partie C

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 4 - e^{-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démonstration par récurrence du fait que $3 < u_n < 4$ pour tout entier $n \geq 1$.

On a : $u_1 = 4 - e^{-u_0} = 4 - e^{-1}$; or $2 < e < 3$, d'où $-\frac{1}{2} < -e^{-1} < -\frac{1}{3}$

$$4 - \frac{1}{2} < u_1 < 4 - \frac{1}{3}$$

$$3 < 4 - \frac{1}{2} < u_1 < 4 - \frac{1}{3} < 4$$

On a bien $3 < u_1 < 4$.

Supposons que $3 < u_n < 4$; que peut-on dire de u_{n+1} ?

$u_{n+1} = 4 - e^{-u_n}$; or d'après l'hypothèse de récurrence, on a $3 < u_n < 4$

d'où : $-4 < -u_n < -3$

$$e^{-4} < e^{-u_n} < e^{-3}$$

$$-e^{-3} < -e^{-u_n} < -e^{-4}$$

$$4 - e^{-3} < 4 - e^{-u_n} < 4 - e^{-4}$$

$$4 - 0{,}05 < 4 - e^{-u_n} < 4 - 0{,}02$$

$$3{,}95 < 4 - e^{-u_n} < 3{,}98$$

$$3 < 3{,}95 < u_{n+1} < 3{,}98 < 4$$

$$3 < u_{n+1} < 4$$

On peut bien conclure que pour tout entier $n \geq 1$, $3 < u_n < 4$.

2. a) Démonstration du fait que, pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de même signe.

Soit $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = e^{-u_{n-1}} - e^{-u_n}$.

Supposons $u_n - u_{n-1} > 0$, c'est-à-dire $u_{n-1} < u_n$, alors on aura : $-u_{n-1} > -u_n$

$$e^{-u_{n-1}} > e^{-u_n}$$

$$e^{-u_{n-1}} - e^{-u_n} > 0$$

$u_{n+1} - u_n > 0$, d'où

$u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ ont le même signe dans ce cas.

En supposant $u_n - u_{n-1} < 0$, on aboutit également à $u_{n+1} - u_n < 0$.

En conclusion, pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ sont bien de même signe.

b) Etude du sens de variation de la suite (u_n).

On a : $u_1 - u_0 = (4 - e^{-1}) - 1 = 3 - e^{-1} = \dfrac{3e - 1}{e}$; donc $u_1 - u_0 > 0$.

Comme $u_1 - u_0 > 0$, alors d'après **2. a)** on a $u_n - u_{n-1} > 0$, ce qui donne $u_{n-1} < u_n$;

donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

3. Etude de la convergence de la suite (u_n).

D’après **2. b)** , la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$; donc elle est croissante sur $\mathbb{N}$.

D’après **1.** , la suite (u_n) est majorée, par 4 par exemple.

Comme toute suite croissante et majorée est convergente, alors la suite (u_n) est convergente car elle est croissante et majorée.

Session Normale 2013 ; 1er tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE 1

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$. AB = $\sqrt{4+4+0}=2\sqrt{2}$; BC = = $\sqrt{0+4+4}=2\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ = 2 × 0 + (-2) × 2 + 0 × (-2) = -4.

2) Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ les coordonnées du point D. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=0\\y-2=2\\z-3=-2\end{cases}$ .D(1, 4, 1).

ABCD est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs (AB et BC) égaux. C'est un losange.

Dans un losange, les diagonales sont médiatrices l'une de l'autre. On a donc (AC) $\perp$(BD) donc $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

3) d[O, (ABC)] = $\dfrac{\left|\overrightarrow{AO}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AO}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})$ = -24 ; $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$ = $4\sqrt{3}$. On en déduit que d([O, (ABC)] = $2\sqrt{3}$.

4) I(2, 2, 2) ; OI = $2\sqrt{3}$. OI = d[O, (ABC)], donc I est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

5) 1ère solution : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}-4\\8\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-12\\0\\12\end{pmatrix}$. $(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD})$ = 48 – 48 =0

   Les plans (OAC) et (OBD) sont orthogonaux

   2ième solution : Dans le losange ABCD, les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires en leur milieu I. Donc I $\in$ (BD).

   (AC)$\perp$(BD) et (AC)$\perp$(OI) donc (AI) $\perp$(OBD). Le plan (AOC) contient une droite (AI) qui est perpendiculaire au plan (OBD). Donc (OBD)$\perp$(OAC).

6) L'aire du quadrilatère ABCD = $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$ = $4\sqrt{3}$.

7) Le volume de la pyramide est égale à $\frac{1}{3}$ OI × Aire de ABCD = $\frac{1}{3}$ × $2\sqrt{3}$ × $4\sqrt{3}$ = 8.

EXERCICE 2

1) $U_3 = \frac{3\times 3-1}{3+1} = 2$; $U_4 = \frac{3\times 2-1}{2+1} = \frac{5}{3}$. $U_4 - U_3 \neq U_3 - U_2$ donc la suite (U_n) n'est pas arithmétique. De même $\frac{U_4}{U_3} = \frac{5}{6}$ et $\frac{U_3}{U_2} = \frac{2}{3}$. $\frac{U_4}{U_3} \neq \frac{U_3}{U_2}$ donc la suite (U_n) n'est pas géométrique.

2)

a) Procédons par une démonstration par récurrence. On constate que $U_2 > 1$. Supposons que $U_{n-1} > 1$. Démontrons que $U_n > 1$. $U_n - 1 =$
$\frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1} - 1 = \frac{3U_{n-1}-1-U_{n-1}-1}{U_{n-}+1} = \frac{2(U_{n-1}-1)}{U_{n-1}+1}$. Puisque $U_{n-1} - 1 > 0$, et $U_{n-1} + 1 > 0$, $\frac{2(U_{n-1}-1)}{U_{n-1}+1} > 0$ et par suite $U_n > 1$.

b) $U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n-1}{U_n+1} - U_n = \frac{3U_n-1-U^2{}_n-U_n}{U_n+1} = \frac{-(U_n-1)^2}{U_n+1} < 0$. La suite ($U_n$) est donc décroissante.

c) (U_n) est une suite décroissante et minorée. Elle est donc convergente. Soit l sa limite. Nous aurons alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3U_n-1}{U_n+1} = \frac{3\lim_{n\to+\infty} U_n - 1}{\lim_{n\to+\infty} U_n + 1}$. Il s'en suit que $l = \frac{3l-1}{l+1}$. La transformation de cette égalité donne l'équation $l^2 - 2l + 1 = 0$; soit $(l-1)^2 = 0$. $l = 1$.

3)

a) Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$V_n - V_{n-1} = \frac{U_n+1}{U_n-1} - \frac{U_{n-1}+1}{U_{n-1}-1} = \frac{\frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1}+1}{\frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1}-1} - \frac{U_{n-1}+1}{U_{n-1}-1} = \frac{4U_{n-1}}{2(U_{n-1}-1)} - \frac{U_{n-1}+1}{U_{n-1}-1}$$

$= \frac{U_{n-1}-1}{U_{n-1}-1} = 1$.

(V_n) est donc une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $V_2 = 2$.

b) Pour tout $n \geq 2$, $V_n = V_2 + (n-2)r = 2 + (n-2) = n$. $V_n = n$.
$V_n = \frac{U_n+1}{U_n-1} \Leftrightarrow U_n = \frac{V_n+1}{V_n-1}$. Donc $U_n = \frac{n+1}{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.

c) $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$.

PROBLEME

Partie A

1) g'(x) = $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}$. g'(x) > 0 sur [0, +∞[car pour tout x∈ [0, +∞[, 1 + x > 0. La fonction g est donc croissante strictement sur cet intervalle. De plus, g(0) = 0. Donc g(x) > 0 sur [0, +∞[.

2) a) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} xe^{\frac{1}{x}}=(\lim\limits_{x\to0^-} x)\times(\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}})$. En posant X = $\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$. Donc $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=0$.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}[x\ln(1+x)]==$ 0. Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$

En conclusion $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$. La fonction f est continue en 0.

b) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)=0$. La dérivée à gauche de f est égale à sa dérivée à droite. La fonction est donc dérivable en 0.

3) a) pour x < 0, f'(x) = $(1-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}$; pour x ≥ 0, f'(x) = $\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$ = g(x).

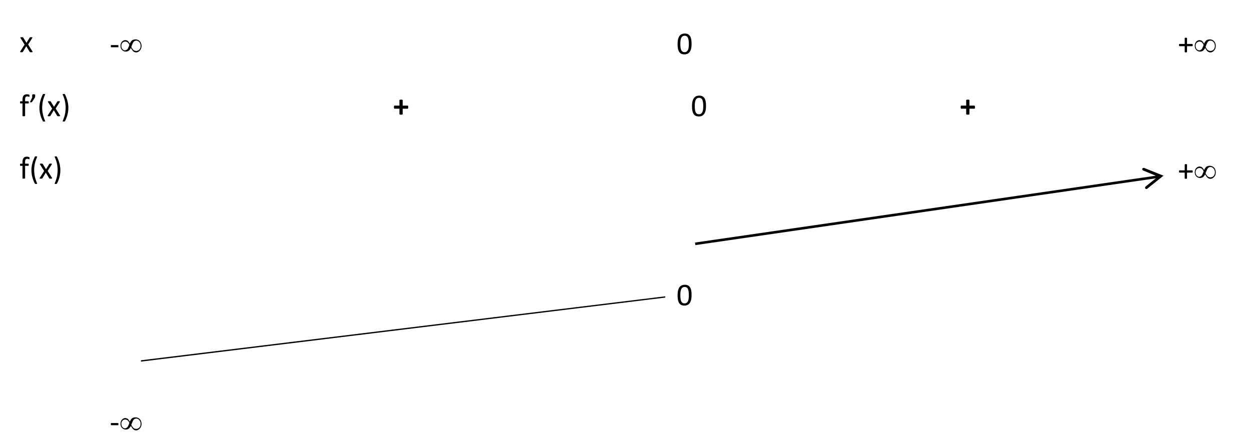
b) Pour x < 0, - $\frac{1}{x}$> 0 et (1 - $\frac{1}{x}$) > 0. Par suite $(1-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}$ > 0 car la fonction exponentielle est toujours positive. On a donc f'(x) > 0 pour tout x < 0.

c) En se référant au résultat du 1) on a pour tout x > 0, f'(x) > 0.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x}}=(\lim\limits_{x\to-\infty} x)\times(\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}})=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+x)$ - +∞.

e) Tableau de variations

x	-∞		0		+∞
f'(x)		+	0	+	
f(x)	-∞		0		+∞



4) a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x)$ =+ ∞. La courbe de la fonction f admet une branche parabolique à +∞.

b) Calculons $\lim_{x\to-\infty}[x(e^{\frac{1}{x}}-1)]$. Posons X = $\frac{1}{x}$. On a alors $\lim_{x\to-\infty}[x(e^{\frac{1}{x}}-1)]=\lim_{X\to0^-}\frac{e^X-1}{X}=1$.

c) (D) est la droite d'équation y = x + 1.

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to-\infty}(xe^{\frac{1}{x}}-x-1)=\lim_{x\to-\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1$. Posons X = $\frac{1}{x}$ On obtient alors

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to-\infty}(xe^{\frac{1}{x}}-x-1)=\lim_{x\to-\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1=\lim_{X\to0^-}\frac{(e^X-1)}{X}-1$ =0. La droite (D) est donc une asymptote oblique de la courbe (C) de f à - ∞.

d) $f(x)-(x+1)=(xe^{\frac{1}{x}}-x-1)=x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1$. Si nous admettons que $x(e^{\frac{1}{x}}-1)\leq1$ ∀ x < 0, il vient que $f(x)-(x+1)=(xe^{\frac{1}{x}}-x-1)=x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1\leq0$. La courbe (C) est donc en dessous de la droite (D) quand x < 0.

5) Voir figure à la fin

PARTIE B

1)a) $\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+(b+c)}{x+1}$ implique a = 1, a + b = 0 et b + c = 0 ;

Soit a = c = 1 et b = -1. On obtient $\frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$.

b) $\int_0^{e-1}f(x)dx=\int_0^{e-1}x\ln(1+x)dx$. Posons u(x) = ln(1 + x) et v'(x) = x ; on a alors u'(x) = $\frac{1}{1+x}$ et

v(x) = $\frac{1}{2}x^2$. Appliquant la formule d'intégration par parties, on obtient

$\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^{e-1}-\frac{1}{2}\int_0^{e-1}\frac{x^2}{x+1}dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^{e-1}-\frac{1}{2}\int_0^{e-1}[x-1+\frac{1}{x+1}]dx=$

$\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^{e-1}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)\right]_0^{e-1}=$

$\frac{1}{2}(e-1)^2-\frac{1}{4}(e-1)^2+\frac{1}{2}(e-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{2}e+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(e^2-3)$.

2) A = $4cm^2\times\int_0^{e-1}[x-f(x)]dx=4cm^2\times[\frac{1}{2}(e-1)^2-\int_0^{e-1}f(x)dx]$ =(e^2-4e+5)cm²

3)a) La fonction h, restriction de f sur [0, +∞[, est continue et strictement croissante sur cet intervalle. Elle est donc bijective. h(0) = 0 et $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Donc I = [0, +∞[.

b) (C') est le symétrique de la partie de (C) pour $x \geq 0$ par rapport à la droite d'équation y = x. (Voir (C') sur la figure).

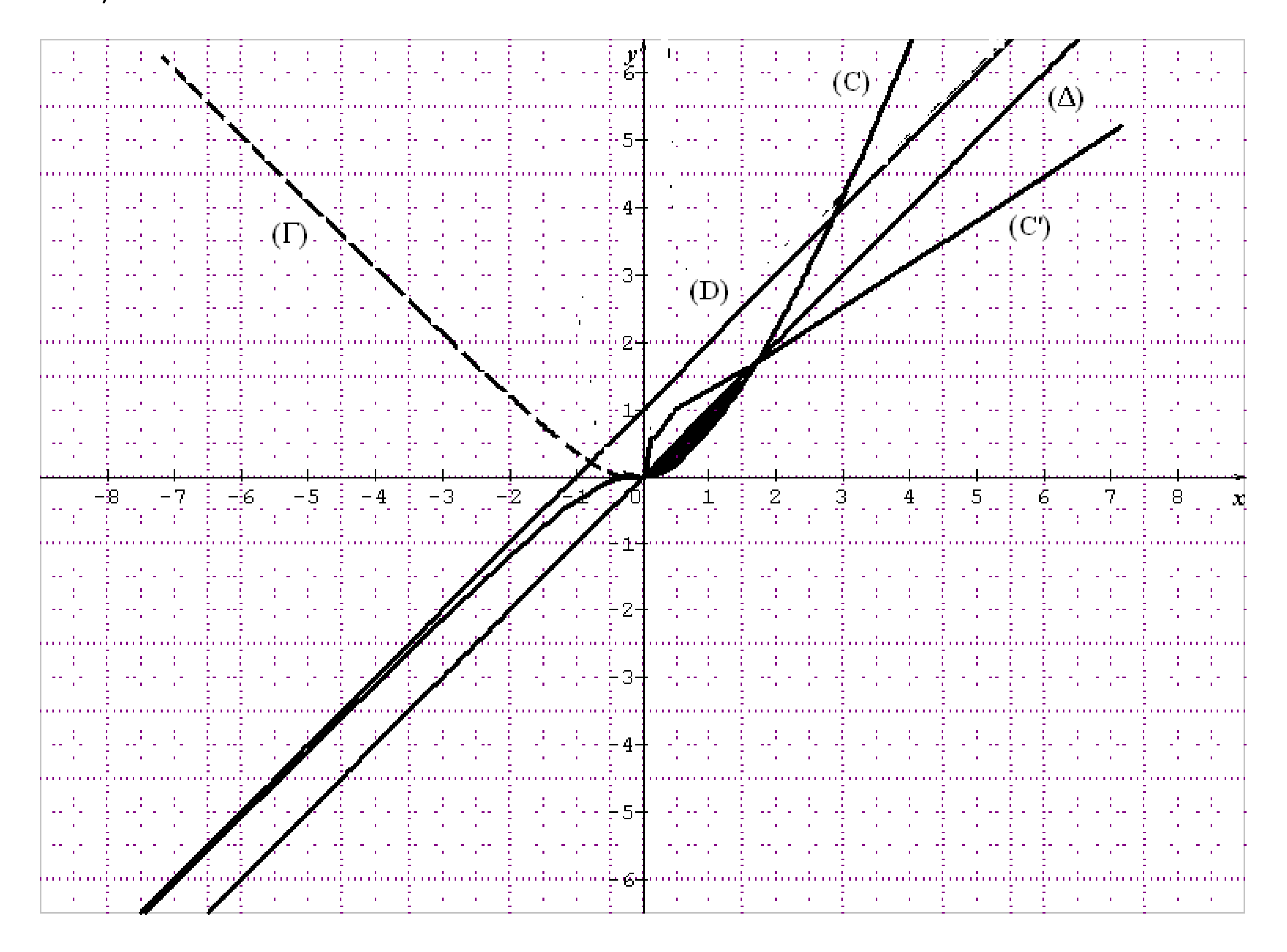
4) A' = 2A, donc A' = $2(e^2-4e+5)cm^2$.

Partie C

On tire que ln(-t) = $\frac{1}{x}$ et t = $-e^{\frac{1}{x}}$ On en déduit que l'équation cartésienne de (Γ) est y = $\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = -xe^{\frac{1}{x}}$.

L'équation est y = $-xe^{\frac{1}{x}}$ pour $x < 0$.

1) L'équation de la courbe (Γ) peut s'écrire y = - f(x) pour $x < 0$.
2) On obtient la courbe (Γ) en prenant le symétrique de la partie de la courbe (C) qui correspond à $x < 0$ par rapport l'axe des abscisses.
3) Voir courbe.



Session Normale 2011 ; 2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE 1

1) $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2$; $I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x}dx = [x]_0^1 = 1$. Donc $I_1 = 1 - \ln 2$.

2) $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

3) Sur l'intervalle [0, 1], 1 + x > 0 et pour tout n, $0 \le x^{n+1} \le x^n$. Donc $0 \le \frac{x^{n+1}}{1+x} \le \frac{x^n}{1+x}$ et par suite

$0 \le \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$. Pour tout n, $0 \le I_{n+1} \le I_n$, la suite (I_n) est décroissante et positive.

4) Pour tout x tel que $0 \le x \le 1$, $x + 1 \ge 1$ et $\frac{1}{x+1} \le 1$. Il s'en suit que, pour tout n, $\frac{x^n}{1+x} \le x^n$ et

par suite $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \le \int_0^1 x^n dx$. Par conséquent $I_n \le \frac{1}{n+1}$ pour tout n ∈ IN.

5) La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente.
De plus $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$, donc $0 \le \lim_{n\to\infty} I_n \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'où $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

EXERCICE 2

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

2) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\-12\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}$; E(2 ; -2 ; 5).

3) *A* = $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| = 9\sqrt{2}$ cm².

4) *V* = $\left\|\overrightarrow{AE}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| = 3\sqrt{2} \times 9\sqrt{2}$ = *54* cm³

5) $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AF} \ne \vec{0}$ donc le point F∉ (AB).

PROBLEME

PARTIE A

1) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2-\frac{2}{x})\times\lim_{x\to 0^+}(\ln x - 1) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2-\frac{2}{x})\times\lim_{x\to+\infty}(\ln x - 1) = +\infty$

2) f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

   f'(x) = $\frac{2}{x^2}(\ln x - 1) + \frac{1}{x}(2-\frac{2}{x}) = \frac{2\ln x - 2 + 2x - 2}{x^2} = \frac{2\ln x + 2x - 4}{x^2}$.

3)

   a) g'(x) = $\frac{2}{x} + 2 = \frac{2(1+x)}{x}$. Pour x∈]0, + ∞[g'(x) $>$ 0 donc g est strictement croissante sur cet intervalle.

   Tableau de variation

   $(\Gamma)\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty;\quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ car $\left|\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} 2\ln x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty}(2x-4) = +\infty\end{array}\right.$.

x	0		+∞
g'(x)	||	+	
g(x)	|| - ∞	↗	+∞

   b) Sur l'intervalle]0, +∞] la fonction g est continue et strictement croissante. De plus g(1) × g(2) = -2ln2 qui est négatif. Il existe donc un unique réel α∈ [1, 2] tel que g(α) = 0.

   c) Sur] 0, α[, g(x) $<$ 0 et sur]α, +∞[, g(x) $>$ 0.

4) a) f'(x) = $\frac{g(x)}{x^2}$. f'(x) est donc du signe de g(x). f est donc croissante sur]0, α] et décroissante sur [α, +∞[. Tableau de variation :

x	0		α		+∞
f'(x)	||	-	0	+	
f(x)	+∞	↘	f(α)	↗	+∞

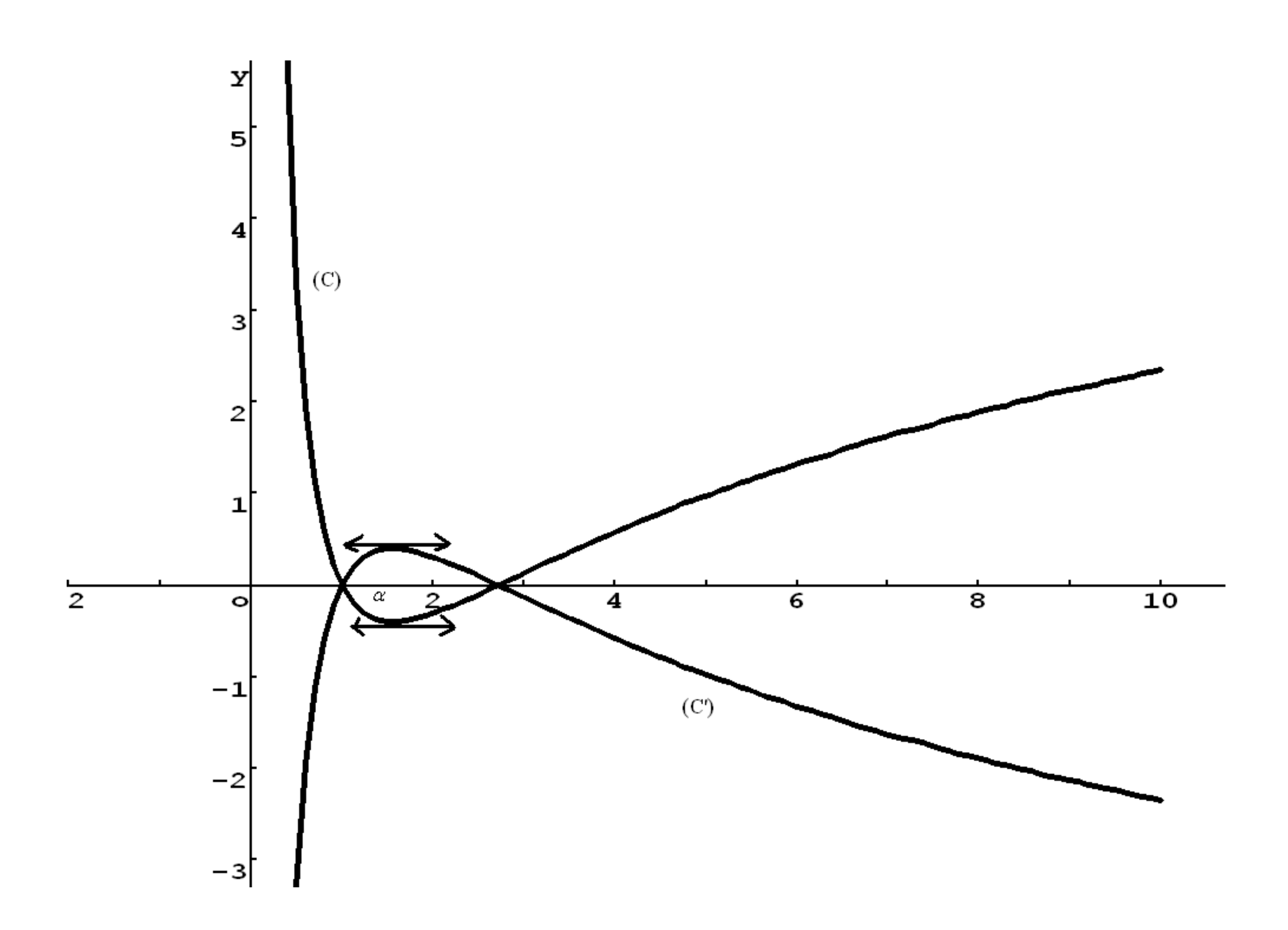
   b) g(α) = 0 ⇔ lnα = 2 - α. On en déduit que f(α) = $\left(2-\frac{2}{\alpha}\right)(\ln\alpha - 1) = \frac{(2\alpha-2)(2-\alpha-1)}{\alpha} = \frac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

   c) f(1) = f(e) = 0.

5) a) Sur]0, 1[∪]e, +∞[f(x) $>$ 0 ; sur]1, e[f(x) $<$ 0.

   b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}[\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x^2} + \frac{2}{x^2}] = 0$. La courbe de f a une direction parabolique d'axe y = 0.

c) Courbe de (C).



6) (C') s'obtient par symétrie orthogonale d'axe (x'x). (Voir figure).

PARTIE B

1) a) F est la primitive de f qui s'annule pour x = 1.

b) F'(x) = f(x). On en déduit que F est croissante sur]0, 1] et sur [e, +∞[, et décroissante sur [1, e].

c) D'après 4) c) de la partie A, f(1) = f(e) = 0, c'est-à-dire, F'(1) = F'(e) = 0, donc les tangentes aux points d'abscisses 1 et e de (Γ) sont parallèles à l'axe des abscisses.

2)

a) $\int_1^x \ln t dt = -x + x\ln x + 1$

b) En développant l'expression de f(x), on obtient f(x) = $2\ln x - \frac{2\ln x}{x} - 2 + \frac{2}{x} = 2\ln x - 2\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$

c) $\int_1^x f(t)dt = \int_1^x [2\ln t - \frac{2\ln t}{t} - 2 + \frac{2}{t}]dt = \left[-2t + 2t\ln t - (\ln t)^2 - 2t + 2\ln t\right]_1^x$

=- $(\ln x)^2$ + 2xlnx + 2lnx – 4x + 4

3) A = $-2\int_1^e f(x)dx \times 4cm^2 = -8\,cm^2\left[F(\mathrm{x})\right]_1^e$ = -8F(e) cm^2.

A= -8cm^2 (5-2e) = (16e – 40) cm^2.

Session Normale 2012 ; 2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE

Exercice 1

$P(Z)=Z^3-6Z^2+12Z-16$

1. a) Démonstration du fait que si $P(Z_0)=0$ alors $P(\overline{Z_0})=0$

Soit Z_0 un nombre complexe tel que $P(Z_0)=0$.

On a : $P(\overline{Z_0})=\overline{Z_0}^3-6\overline{Z_0}^2+12\overline{Z_0}-16=\overline{Z_0^3-6Z_0^2+12Z_0-16}=\overline{P(Z_0)}=\overline{0}=0$.

Donc, si Z_0 un nombre complexe tel que $P(Z_0)=0$, alors on a bien $P(\overline{Z_0})=0$.

b) Calcul de $P(1+i\sqrt{3})$ et factorisation de $P(Z)$

$P(1+i\sqrt{3})=(1+i\sqrt{3})^3-6(1+i\sqrt{3})^2+12(1+i\sqrt{3})-16$

$P(1+i\sqrt{3})=(1+3i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}-9)-6(1+2i\sqrt{3}-3)+12(1+i\sqrt{3})-16$

$P(1+i\sqrt{3})=(1-9-6+18+12-16)+i(3\sqrt{3}-3\sqrt{3}-12\sqrt{3}+12\sqrt{3})$

$P(1+i\sqrt{3})=0+0\,i$

$P(1+i\sqrt{3})=0$

Comme $P(1+i\sqrt{3})=0$, alors $1+i\sqrt{3}$ est une racine de $P(Z)$. D'après **1. a)**, $\overline{1+i\sqrt{3}}=1-i\sqrt{3}$ est également une racine de $P(Z)$. De plus, le coefficient de Z^3 est égal à 1 dans $P(Z)$. Par conséquent, il existe un nombre complexe α tel que pour tout $Z\in\mathbb{C}$, $P(Z)=(Z-(1+i\sqrt{3}))\times(Z-(1-i\sqrt{3}))\times(Z+\alpha)$. On obtient, par la méthode des coefficients indéterminés ou par la division euclidienne, $\alpha=-4$; ce qui donne

$P(Z)=(Z-(1+i\sqrt{3}))\times(Z-(1-i\sqrt{3}))\times(Z-4)$.

c) Déduction des solutions de l'équation $P(Z)=0$

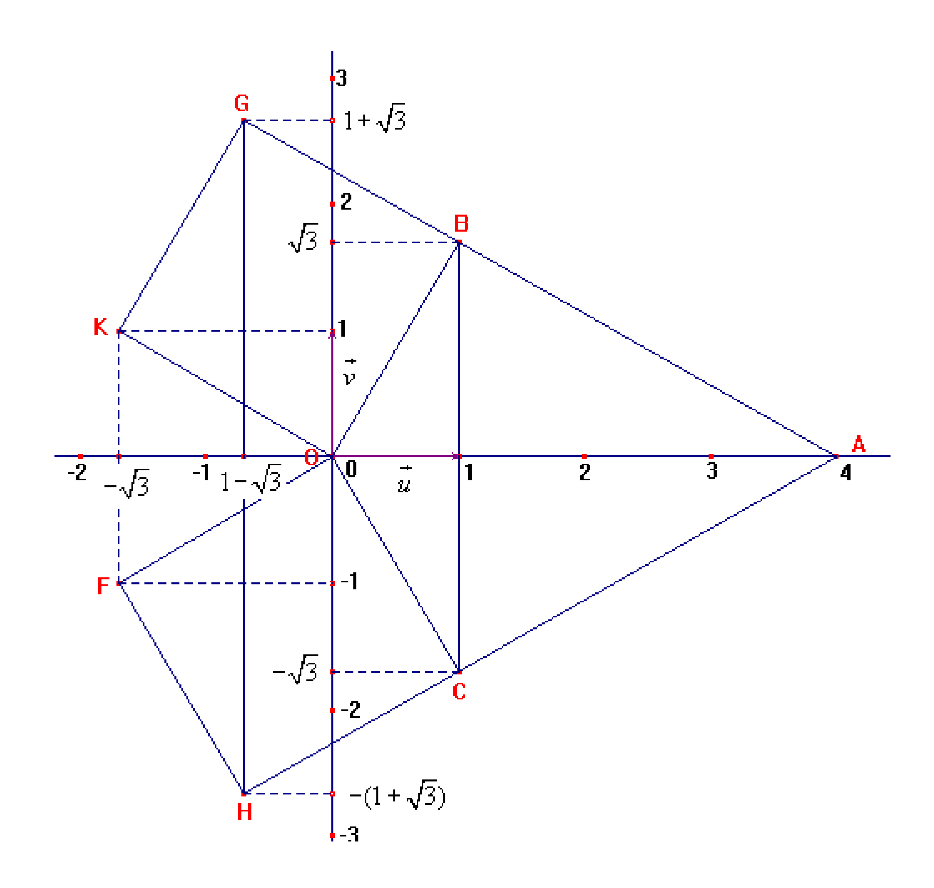
Comme $P(Z)=(Z-(1+i\sqrt{3}))\times(Z-(1-i\sqrt{3}))\times(Z-4)$, les solutions de l'équation $P(Z)=0$ sont les nombres complexes suivants : $1+i\sqrt{3},\ 1-i\sqrt{3},\ 4$.

$S=\{1+i\sqrt{3},1-i\sqrt{3},4\}$

2. $A,\ B$ *et* C sont les points d'affixes respectives $a=4;\ b=1+i\sqrt{3}$ *et* $c=\overline{b}$ dans un repère

orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ du plan.

a) Figure



b) Nature exacte du triangle ABC

$$AB=|b-a|=\left|-3+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$AC=|c-a|=\left|-3-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$BC=|c-b|=\left|-2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$$

On a $AB=AC=BC$; donc le triangle ABC est un triangle équilatéral.

3. a) Détermination des affixes des points F et G.

$$Z_F=e^{i\frac{\pi}{3}}\times Z_K=(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\times(-\sqrt{3}+i)=-\sqrt{3}-i$$

$\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{OB}$; donc $Z_G-Z_K=Z_B-Z_O$, ce qui donne

$$Z_G=Z_B+Z_K-Z_O=(1+i\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+i)=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$$

$Z_F=-\sqrt{3}-i$ et $Z_G=1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$

b) Démonstration du fait que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

$(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OC}) = \arg(\frac{Z_C}{Z_F}) = \arg(\frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i}) = \arg i = \frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; donc les vecteurs $\overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux. Par conséquent les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4. a) Calcul de l'affixe Z_H de H et démonstration du fait que $COFH$ est un carré.

Comme $COFH$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{FH}$; ce qui donne $Z_C = Z_H - Z_F$

et donc $Z_H = Z_C + Z_F = (1-i\sqrt{3})+(-\sqrt{3}-i) = (1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})$

$Z_H = 1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})$

$OC = |c| = \left|1-i\sqrt{3}\right| = 2$

$OF = |Z_F| = \left|-\sqrt{3}-i\right| = 2$

On a donc $OC = OF$.

Les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires d'après **3. b)**.

$COFH$ est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux et perpendiculaires ; c'est un carré.

b) Nature du triangle AGH

$AG = |Z_G - Z_A| = \sqrt{16+8\sqrt{3}}$

$AH = |Z_H - Z_A| = \sqrt{16+8\sqrt{3}}$

$GH = |Z_H - Z_G| = \sqrt{16+8\sqrt{3}}$

On a $AG = AH = GH$, donc AGH est un triangle équilatéral.

Exercice 2

1. Détermination des coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$. Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3 & 0\\0 & -2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & -2\\-2 & -2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2 & -2\\3 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix}-6\\-4\\6\end{pmatrix}$

2. a) Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal du plan (ABC). H étant un point du

plan (ABC) car projeté orthogonal de O sur ce plan, alors les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

Déduction du fait que $3a+2b-3c-6=0$

On a : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} a-2 \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, alors $\vec{u}.\overrightarrow{AH} = 0$; ce qui donne $-6(a-2)-4b+6c=0$, conduisant après simplification à $3a+2b-3c-6=0$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. De même, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont orthogonaux. Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Comme les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, il existe alors un réel t tel que $\overrightarrow{OH} = t\,\vec{u}$,

ce qui donne : $\begin{cases} a=-6t \\ b=-4t \\ c=6t \end{cases}$

c) Détermination de la valeur de t, puis des coordonnées de H.

En remplaçant $a,\ b\ et\ c$ par leurs expressions respectives en fonction de t dans $3a+2b-3c-6=0$, on obtient $t=-\frac{3}{22}$; d'où $H(\frac{9}{11},\frac{6}{11},-\frac{9}{11})$.

d) Calcul de la distance du point O au plan (ABC).

H étant le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC), la distance de O à (ABC) est égale à OH.

$$d(O,(ABC)) = OH = \sqrt{(\frac{9}{11})^2+(\frac{6}{11})^2+(-\frac{9}{11})^2} = \sqrt{\frac{198}{121}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$$

3. Calcul du volume du tétraèdre de base ABC et de sommet O.

Soit V ce volume en unité de volume ; $V=\frac{1}{3}\times(aire\ du\ triangle\ (ABC)\times hauteur)$.

Or, $aire(ABC)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\vec{u}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(-4)^2+6^2}=\frac{1}{2}\sqrt{88}=\sqrt{22}$ et

hauteur = $OH = \frac{3\sqrt{22}}{11}$; donc $V=\frac{1}{3}\times\sqrt{22}\times\frac{3\sqrt{22}}{11}=\frac{22}{11}=2$.

$V = 2\ u.v$

Problème

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-\ln|x|}{x} + x - 2$

Partie A

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln|x|$

1. Etude des variations de g et tableau de variations

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ *car* $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2+1) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} (-\ln|x|) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x) = +\infty$ *car* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (-x^2+1) = 1$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (-\ln|x|) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = +\infty$ *car* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (-x^2+1) = 1$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (-\ln|x|) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ *car* $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2+1) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\ln|x|) = -\infty$

g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = -2x - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{2x^2+1}{x}$

Pour tout réel $x < 0$, $g'(x) > 0$; donc g est strictement croissante sur]- ∞,0[

Pour tout réel $x > 0$, $g'(x) < 0$; donc g est strictement décroissante sur]0,+∞[

Tableau de variations de g

x	-∞		0		+∞
$g'(x)$		+	‖	-	
$g(x)$	-∞	↗ +∞	‖	+∞ ↘	-∞

2. Calculs de $g(-1)$ *et* $g(1)$ et déduction du signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

$g(-1) = 0$ *et* $g(1) = 0$; Par suite, on déduit du tableau de variations de g ce qui suit :

Pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, $g(x) > 0$

Partie B

1. Calcul des limites de f aux bornes de son ensemble de définition

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(\frac{-\ln|x|}{x}+x-2)=-\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-\ln|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{(-x)}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0 \; et \; \lim_{x\to-\infty}(x-2)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}(\frac{-\ln|x|}{x}+x-2)=-\infty \; car \; \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{-\ln|x|}{x}=-\infty \; et \; \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}(x-2)=-2$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(\frac{-\ln|x|}{x}+x-2)=+\infty \; car \; \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-\ln|x|}{x}=+\infty \; et \; \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(x-2)=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{-\ln|x|}{x}+x-2)=+\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln|x|}{x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \; et \; \lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$$

Comme $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=-\infty$ et $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$, alors la droite d'équation $x=0$ (axe des ordonnées) est une asymptote verticale pour la courbe (C).

2. a) Démonstration du fait que la droite $(D): y=x-2$ est asymptote à (C).

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x-2))=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\ln|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{(-x)}=0 \text{ et}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-2))=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln|x|}{x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$; donc la droite (D) d'équation $y=x-2$ est bien une asymptote pour (C).

b) Etude des positions relatives de (C) par rapport à (D).

$f(x)-(x-2)=-\frac{\ln|x|}{x}$; par conséquent, on a :

$(C)\cap(D)=\{(-1,-3);(1,-1)\}$

Pour tout $x\in]-\infty,-1[\cup]0,1[$, $(f(x)-(x-2))>0$; donc (C) est au dessus de (D)

Pour tout $x\in]-1,0[\cup]1,+\infty[$, $(f(x)-(x-2))<0$; donc (C) est en dessous de (D)

3. a) Calcul de $f'(x)$, en fonction de $g(x)$, puis déduction du sens de variation de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel non nul x,

$$f'(x)=\frac{-1+\ln|x|}{x^2}+1=\frac{x^2-1+\ln|x|}{x^2}=-\frac{(-x^2+1-\ln|x|)}{x^2}=-\frac{g(x)}{x^2}$$

Pour tout réel non nul x, $x^2>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de ($-g(x)$). On obtient alors d'après la question **2.) de la partie A** ce qui suit :

$f'(-1) = f'(1) = 0$

Pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $f'(x) > 0$; donc f est strictement croissante sur chacun des intervalles]-∞, -1] et [1, +∞[

Pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,1[$, $f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur chacun des intervalles [-1, 0[et]0, 1].

b) Tableau de variations de f

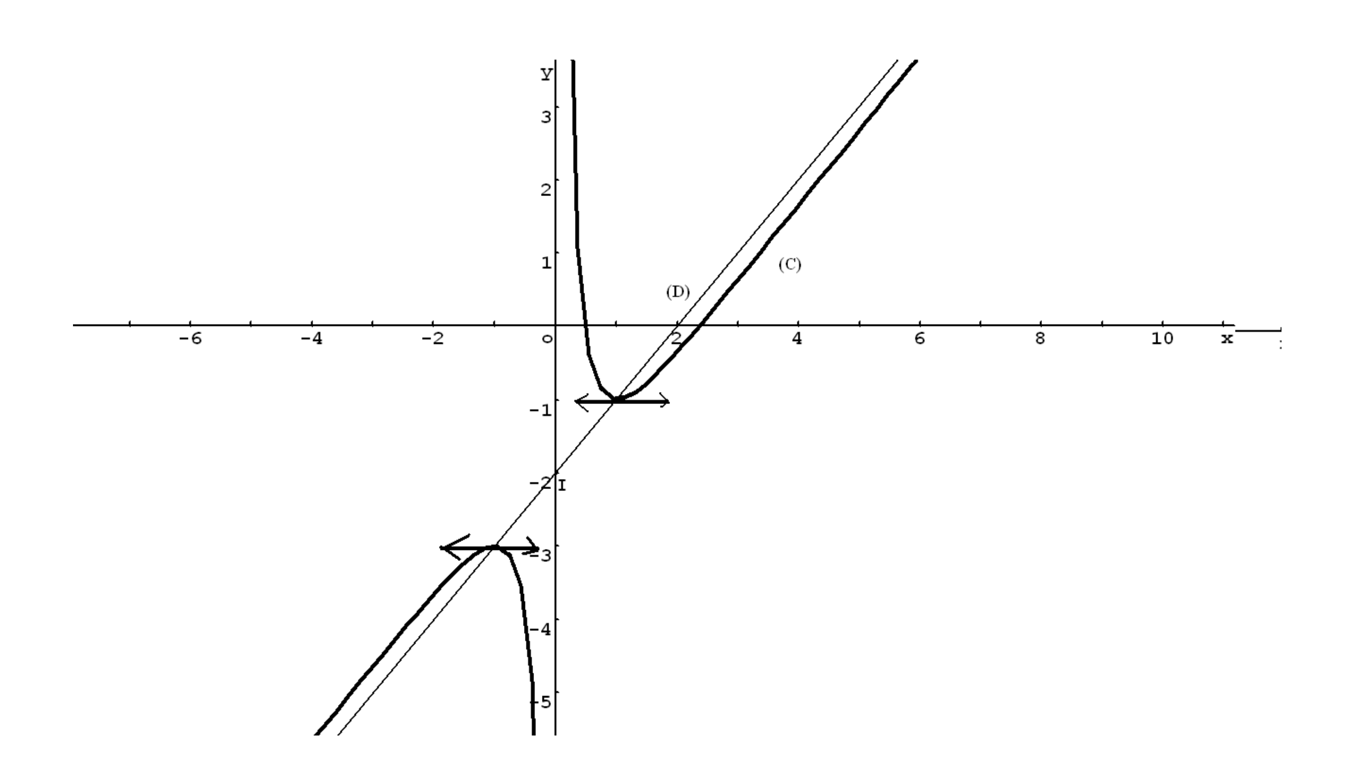
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

4. a) Démonstration du fait que I, point d'intersection des asymptotes, est un centre de symétrie pour la courbe (C).

Les asymptotes ayant pour équations $x = 0$ *et* $y = x - 2$, on obtient alors $I(0,-2)$.

Soit M un point de (C), de coordonnées (x, y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et (X, Y) dans le repère $(I,\vec{i},\vec{j})$. On a, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$; ce qui donne $x = X$ et $y = -2 + Y$. Par suite, $y = \frac{-\ln|x|}{x} + x - 2$ équivaut à $-2 + Y = \frac{-\ln|X|}{X} + X - 2$ ou encore $Y = X - \frac{\ln|X|}{X}$. La fonction $F : X \mapsto X - \frac{\ln|X|}{X}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $X \in \mathbb{R}^*$, $-X \in \mathbb{R}^*$, $F(-X) = -F(X)$; F est impaire et donc $I(0,-2)$ est bien un centre de symétrie de (C).

b) Construction de (C), ainsi que des asymptotes.



5. Discussion graphique du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ dans $\mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$.

Graphiquement, l'équation $f(x) = m$ est l'équation aux abscisses des points d'intersection de (C) et la droite d'équation $y = m$.

Si $m \in]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[$, (C) et la droite d'équation $y = m$ ont deux points communs, donc l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions

Si $m \in]-3, -1[$, (C) et la droite d'équation $y = m$ n'ont pas de point commun, donc l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solutions

Si $m \in \{-3, -1\}$, (C) et la droite d'équation $y = m$ ont un seul point commun, donc l'équation $f(x) = m$ admet une seule solution ($x = -1$ *si* $m = -3$ *et* $x = 1$ *si* $m = -1$).

Partie C

1. a) Calcul de $A(\alpha)$ en fonction de α

$A(\alpha)=\int_{-1}^{\alpha}|f(x)-(x-2)|dx=\int_{-1}^{\alpha}[(x-2)-f(x)]dx$ car $(D): y=x-2$ est au-dessus de

(C) sur $[-1,\alpha]$; donc $A(\alpha)=\int_{-1}^{\alpha}\frac{\ln|x|}{x}dx=[\frac{1}{2}(\ln|x|)^2]_{-1}^{\alpha}=\frac{1}{2}(\ln|\alpha|)^2=\frac{1}{2}(\ln(-\alpha))^2$

$A(\alpha)=\frac{1}{2}(\ln(-\alpha))^2$ en unités d'aire et $A(\alpha)=2(\ln(-\alpha))^2$ cm²

b) Calcul de $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}} A(\alpha)$

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}} A(\alpha)=\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}}\frac{1}{2}(\ln|\alpha|)^2=+\infty$$

2. a) Calcul de u_n en fonction de n pour tout entier naturel non nul.

$$u_n=\int_1^n f(x)dx=\int_1^n\left(\frac{-\ln|x|}{x}+x-2\right)dx=[-\frac{1}{2}(\ln x)^2+\frac{1}{2}x^2-2x]_1^n=-\frac{1}{2}(\ln n)^2+\frac{1}{2}n^2-2n+\frac{3}{2}$$

$$u_n=-\frac{1}{2}(\ln n)^2+\frac{1}{2}n^2-2n+\frac{3}{2}$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{1}{2}(\ln n)^2+\frac{1}{2}n^2-2n+\frac{3}{2})=\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{2}n^2\times(-(\frac{\ln n}{n})^2+1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}))=+\infty$ car

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}n^2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-(\frac{\ln n}{n})^2+1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2})=1$ à cause du fait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ d'une part et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2})=0$ d'autre part.

La suite (u_n) est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

Session Normale 2013 ; 2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE)

EXERCICE 1

1) Soit Ω l'univers des éventualités. Card(Ω) = C_{10}^2 = 45

P(A)=$\frac{\text{Card(A)}}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_4^2}{45} = \frac{6}{45}$; p(B) = $\frac{C_6^2}{45} = \frac{15}{45}$; p(C) = $\frac{C_4^1 \times C_6^1}{45} = \frac{24}{45}$.

2)
   a) Loi de probabilité de X

Les valeurs prises par X sont 2, 6 et 10. P(X = 2) = $\frac{C_a^2}{45} = \frac{a(a-1)}{90}$; p(X = 6) = $\frac{C_a^1 \times C_b^1}{45} = \frac{ab}{45} = \frac{a(10-a)}{45}$;

p(X = 10) = $\frac{C_b^2}{45} = \frac{b(b-1)}{90} = \frac{(10-a)(9-a)}{90}$. On remarquera que pour a = 1 p(X = 2) = 0 et que pour a = 9 p(X = 10) = 0. On en déduit :

x_i	2	6	10
$P(X = x_i)$	$\frac{a(a-1)}{90}$	$\frac{a(10-a)}{45}$	$\frac{(9-a)(10-a)}{90}$

   b) E(X) = $2 \times \frac{a(a-1)}{90} + 6 \times \frac{a(10-a)}{45} + 10 \times \frac{(9-a)(10-a)}{90} = \frac{450-36a}{45} = 10 - \frac{4a}{5}$.
   c) $6 < E(X) < 8 \Leftrightarrow 6 < 10 - \frac{4a}{5} < 8$. Ce qui donne $2 < \frac{4a}{5} < 4$. $a \in]2{,}5 ; 5[$. $a \in \{3, 4\}$.

EXERCICE 2

1)
   a) $(1 + i)^3 - (7 + i)(1 + i)^2 + 2(8 + 3i)(1 + i) - 10(1 + i) =$
      $(-i - 3 + 3i + 1) - (14i - 2) + (10 + 22i) - 10 - 10i = 0$
      Donc $z_0 = 1 + I$ est solution de l'équation (E).
   b) Résolution de l'équation

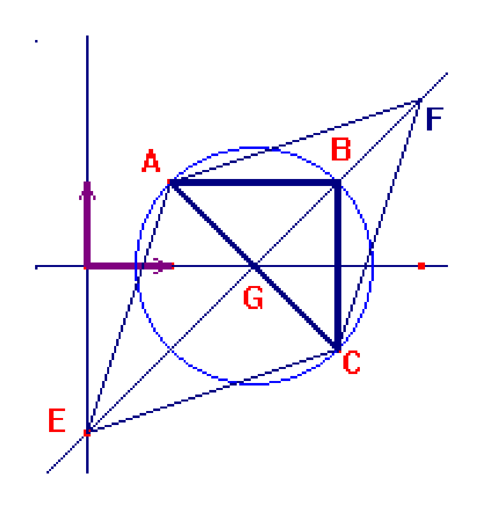
Le complexe z_0 est solution de (E), donc $z^3 - (7 + i)z^2 + 2(8 + 3i)z - 10(1 + i) = [z-(1 + i)](az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont des nombres complexes. On trouve par identification a = 1, b = -6 , c = 10.

Considérons donc l'équation $z^2 - 6z + 10 = 0$.$\Delta = 36 - 40 = -4 = 4i^2 = (2i)^2$.

On trouve $z' = 3 + i$ et $z'' = 3 - i$. $S_\forall = \{1 + i ; 3 + i ; 3 - i\}$.

2)
   a) $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1+i-3-i}{3-i-3-i} = \frac{-2}{-2i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
   b) $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = -i \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{BA}{BC} = 1 \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ ABC est donc un triangle rectangle et isocèle de sommet B.

c)



d) (Γ) est le cercle qui a pour centre le milieu G de l'hypoténuse [AC] , et pour rayon la moitié de AC. G(2i) et r = $2\sqrt{2}$.

3) Bnn

a) (Δ) est l'ensemble des points équidistants de A et C. C'est la médiatrice du segment [AC].

b) FA = $|3+i| = \sqrt{10}$; FC = $|1+3i| = \sqrt{10}$. FA = FC donc F appartient à la médiatrice (Δ) de [AC].

c) Le point étant sur l'axe des ordonnées, il a pour affixe iα. EA = EB $\Leftrightarrow |1+i-i\alpha| = |3-i-i\alpha|$.

$1 + (1-\alpha)^2 = 9 + (1+\alpha)^2$. Soit $\alpha^2 - 2\alpha + 2 = \alpha^2 + 2\alpha + 10$.L'affixe de E est – 2i.

4) Nature exacte du quadrilatère CEAF.

EA = $|1+i+2i| = \sqrt{10}$ =AF. Donc CEAF est un losange.

PROBLEME

PARTIE A

1) $v(x) = axe^{-2x} + 2$; $v'(x) = ae^{-2x} - 2axe^{-2x}$. $\frac{1}{2}y' + y = \frac{a-2ax}{2}e^{-2x} + axe^{-2x} + 2 = \frac{a-2ax\ \ +2ax}{2}e^{-2x} + 2$.

La fonction v est solution de (E) si $\frac{a}{2} = 3$. On trouve $a = 6$.

2) $\frac{1}{2}y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$ ou $\frac{y'}{y} = -2$. Cette équation donne comme solution générale $y = Ae^{-2x}$ où A est un réel quelconque

3)

a) u est solution de (E) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}u' + u = 3e^{-2x} + 2$. Par ailleurs $\frac{1}{2}v' + v = 3e^{-2x} + 2$.

u est solution de (E) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}u' + u = \frac{1}{2}v' + v$. Cette égalité peut se mettre sous la forme : $\frac{1}{2}(v' - u') + (v - u) = 0$. D'où le résultat.

b) Les solutions de (E) sont telles que $-u(x) + v(x) = Ae^{-2x}$où A est un réel quelconque. Donc $u(x) = 6xe^{-2x} + 2 - Ae^{-2x}$.

4) $h(x) = (6x - A)e^{-2x} + 2$. h(0) = 0 $\Leftrightarrow$A = 2. $h(x) = 6x - 2)e^{2x} + 2$.

PARTIE B

1) Etude d'une fonction auxiliaire

1)

a) $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0^+}(1 + x + \ln x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(1 + x + \ln x) = +\infty$.

b) $g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Sur $]0,+\infty[$, g'(x) est strictement positif. La fonction g est croissante sur $]0,+\infty[$.

c)

x	0		$+\infty$
g'(x)	||	+	
g(x)	||	↗	$+\infty$

- ∞

2) La fonction g est continue et strictement croissante su]0,+∞[. Elle réalise donc une bijection de]0, +∞[sur IR. On en déduit que 0 possède un antécédent unique α dans] 0, -∞[
g(0,2) = -0,4 ; g(0,3) = 0,09. g(0,2) × g(0,3) < 0. Donc α∈]0,2 ; 0,3[.
3) La fonction g étant strictement croissante avec g(α) = 0. Donc, ∀x, x <α ⇔g(x) < g(α) ou encore g(x) < 0 ; et ∀x, x > α ⇔ g(x) > g(α) ou g(x) > 0. On en conclut que : g(x) est négatif sur]0, α[et g(x) est positif sur]α, +∞[.

II- Etude et représentation graphique de f

1) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{1+x} = 0$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$; f est continue en 0.

2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{1+x}-0}{x} = -\infty$ $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2(3x-1)e^{-2x}}{x} = 10$;

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{1+x}-0}{x} = -\infty$.

La fonction f est donc dérivable à gauche en 0, mais n'est pas dérivable à droite. F n'est pas dérivable en 0. La courbe (C_f) de f admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur 10 et une demi-tangente verticale à droite.

3) $\lim_{x\to -\infty} 2(3x-1)e^{-2x} + 2 = -\infty$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{x\ln x}{1+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1+x} \times \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}\ln x}{\cancel{x}(1+x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{1+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}}{\lim_{x\to +\infty} \frac{1+x}{x}} = 0$.

La courbe (C_f) de f possède une branche parabolique de direction (Ox).

5) Pour tout x ∈]0 , +∞ [, f'(x) = [6 -4(3x-1)]e^{-2x} = (10 -12x)e^{-2x}

Pour tout x ∈]0, +∞[, f'(x) = $\frac{(1+x)(\ln x+1)-x\ln x}{(1+x)^2} = \frac{\ln x+1+x\ln x+x-\ln x}{(1+x)^2} =$

$\frac{1+\ln x+x}{(1+x)^2} = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$.

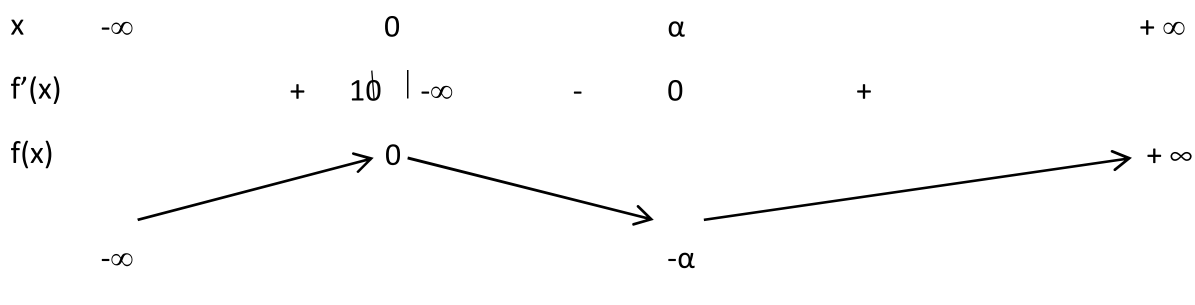
Pour tout x ∈]-∞, 0], le signe de f'(x) dépend du signe de 10-12x qui est positif pour x $<\frac{5}{6}$.

Donc f'(x) > 0 sur]-∞, 0]. f est croissante sur cet intervalle.

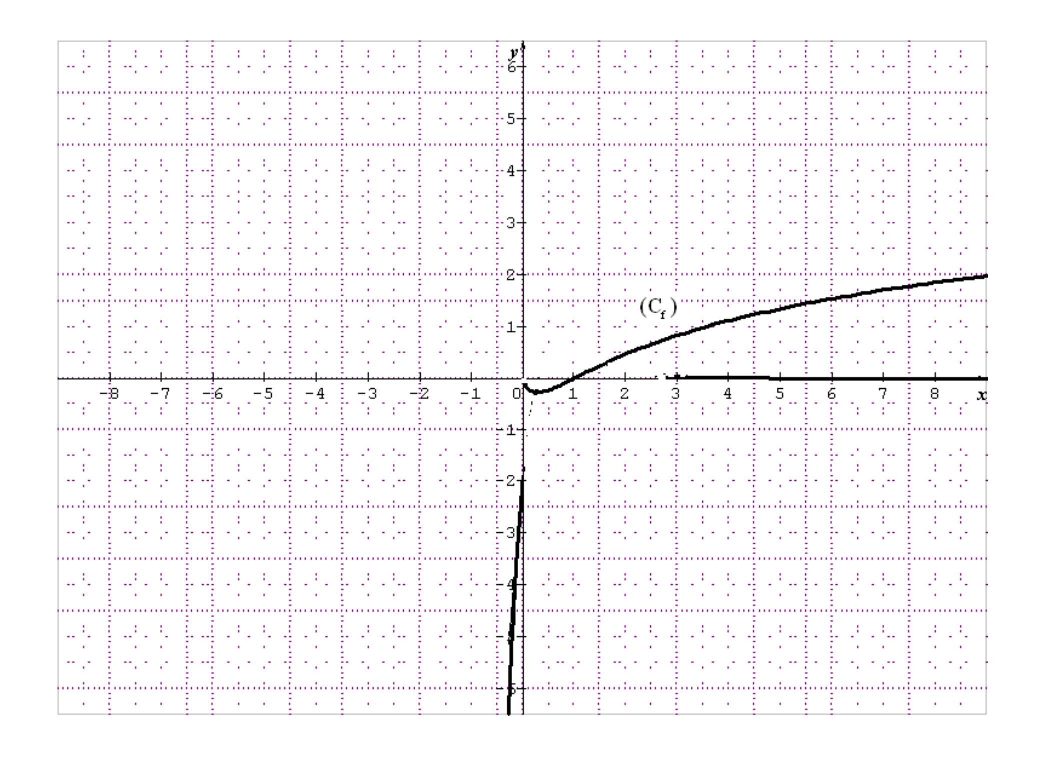
Pour $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$. Le signe de f' est celui de g(x). D'après le B 3) on peut dire que : $\forall x \in]0, \alpha[$, $f'(x) < 0$ et f est décroissante ; $\forall x \in]\alpha, +\infty[$, $f'(x) > 0$ et donc f est croissante.

6) $f(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{1+\alpha}$; comme $g(\alpha) = 0$, nous avons $\ln\alpha = -1 - \alpha$. $f(\alpha) = \frac{\alpha(-1-\alpha)}{1+\alpha} = -\frac{\alpha(1+\alpha)}{1+\alpha} = -\alpha$.
Le point d'intersection de (C_f) avec l'axe (Ox) est tel que f(x) = 0. f(0) = 0 ;
par ailleurs $\frac{x \ln x}{x} = 0$ implique que ln x = 0, soit x = 1. Il y a donc deux points d'intersection : O(0,0) et le point de coordonnées (1,0).

7)



8)



PARTIE C

1) $F'(x) = (-2ax-2b+a)e^{-2x} = [-2ax - (2b - a)]e^{-2x}$. $F'(x) = (3x - 1)e^{-2x} \Leftrightarrow -2a = 3$ et $2b - a = 1$. On trouve $a = -\frac{3}{2}$ et $b = -\frac{1}{4}$. Donc $F(x) = -\frac{1}{2}(3x + \frac{1}{2})e^{-2x}$.

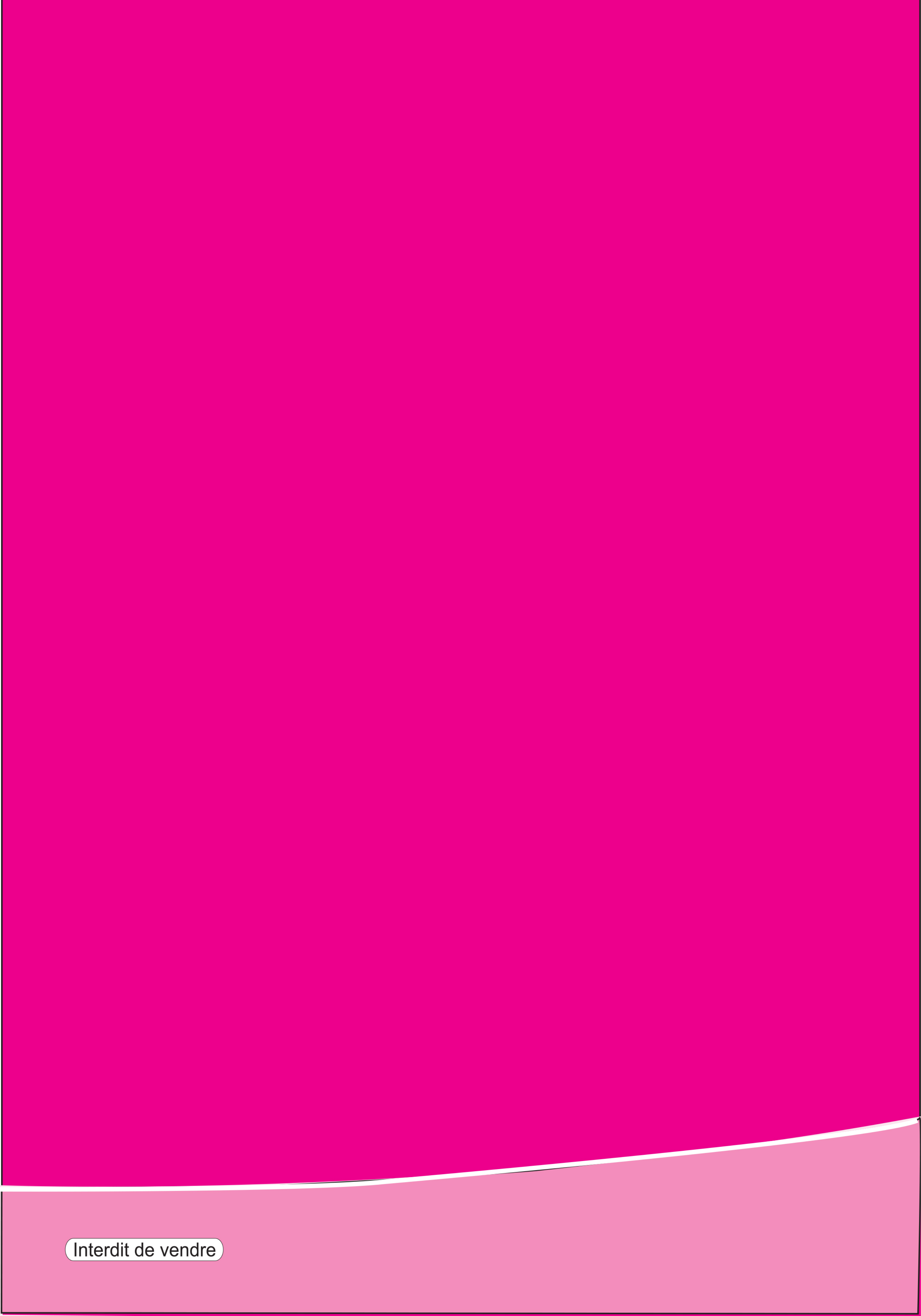
2) A(λ) =- $\int_{\lambda}^{0} f(x)dx$ u.a $= \left[2F(x) + 2x\right]_0^{\lambda}$ u.a = ([- (3λ+ $\frac{1}{2}$)e$^{-2\lambda}$ + 2λ] + $\frac{1}{2}$) × 16 cm² = 8 – (48λ+ 8)e$^{-2\lambda}$ + 32λ = 8 + 32λ - 8(6λ + 1)e$^{-2\lambda}$

3) $\lim_{\lambda \to -\infty} [8 + 32\lambda - 8(6\lambda + 1)e^{-2\lambda}] = \lim_{\lambda \to -\infty} [\frac{8 + 32\lambda}{e^{-2\lambda}} - 8(6\lambda + 1)]e^{-2\lambda}$

$$= \left[\lim_{\lambda \to -\infty} \frac{8+32\lambda}{e^{-2\lambda}} - \lim_{x \to -\infty} 8(6\lambda+1) \right] \times \lim_{\lambda \to -\infty} e^{-2\lambda} = +\infty \,.$$

TABLE DES MATIERES

Titres Pages


Interdit de vendre